29

BIBL[illegible] [illegible]TĂȚII DE ȘTIINȚE
MATEM[illegible] ȘI FIZICE DIN R. P. R.

I. S. DUBNOV

ERORI ÎN DEMONSTRAȚIILE GEOMETRICE

TRADUCERE DIN LIMBA RUSĂ

EDITURA TEHNICĂ

I. S. DUBNOV

ERORI ÎN DEMONSTRAȚIILE GEOMETRICE

29

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

BUCUREȘTI – 1958

PREFAȚĂ LA PRIMA EDIȚIE

La baza acestei broşuri, stau lecțiile-discuții pe care le-am ținut de mai multe ori cu elevii din clasele VII-VIII, sau IX-X, în cercul de matematică pentru elevi de pe lîngă Universitatea de Stat „M. V. Lomonosov" din Moscova. Atît pentru unii cît și pentru ceilalți s-au organizat de obicei două întîlniri, la un interval de aproximativ o lună. Primele ședințe au corespuns, în ce privește conținutul, cu capitolele I și III ale acestei broșuri, au avut un caracter de lecție și au cuprins, în afară de o introducere, expunerea fără comentarii a unor exemple de demonstrații eronate; la sfîrșitul lecției, s-a propus auditorilor să explice esența erorilor comise și să fie pregătiți, la următoarea întîlnire, să-și expună obiecțiile. Cea de a doua întîlnire a fost, în cea mai mare parte, o discuție în amîndouă cazurile: lectorul a amintit pe scurt conținutul fiecărui exemplu și a invitat apoi să ia cuvîntul pe cei care doreau. Întotdeauna, s-au găsit mai mulți amatori, dar la tablă a ieșit unul, ales la întîmplare; celorlalți li s-a dat posibilitatea de a lua cuvîntul de la locul lor și uneori de a ieși și ei la tablă. Analiza fiecărui exemplu s-a terminat cu scurte intervenții ale lectorului, conținînd completări, variante și concluzii.

E greu de crezut că toți elevii care au luat parte activă la această muncă s-au pregătit singuri, fără a fi fost ajutați. Dar o expunere judicioasă a infirmării unui sofism, chiar împrumutată, este departe de a fi întotdeauna o problemă simplă. Spre cinstea elevilor din Moscova care au frecventat cercul, trebuie să recunoaștem că ei s-au arătat aici într-o lumină foarte bună; unele expuneri au fost pur și simplu excelente.

Încurajat de această experiență, mă adresez acum unui public mai larg, în speranța că această broșură va trezi la cititori nu numai setea de a cunoaște, ci și o activitate matematică. Aceasta din urmă se poate manifesta în aceea că cetitorul va parcurge calea recomandată auditorilor lecțiilor mele: mai întîi, va studia exem-

înșeală, nici pe teoreme care, chiar dacă sînt adevărate, nu au fost încă demonstrate (deoarece acestea din urmă se pot baza, la rîndul lor, pe teorema de demonstrat, și atunci se obține un „cerc vicios").

Se știe ce rol joacă figura în demonstrație: ea face să devină intuitiv nu numai conținutul teoremei, ci și mersul demonstrației. Uneori, pentru aceeași teoremă, sînt necesare cîteva figuri, deoarece demonstrația se modifică în funcție de poziția relativă a părților figurii (de exemplu: teorema privind unghiul înscris, pentru a cărei demonstrație se consideră, de obicei, trei cazuri: centrul cercului se află pe o latură a unghiului, în interiorul sau în afara lui). În aceste cazuri, este important să fie epuizate toate pozițiile posibile ale părților figurii; omiterea unei variante, pentru care raționamentele precedente nu pot fi repetate, face, bineînțeles, ca întreaga demonstrație să-și piardă valabilitatea, deoarece tocmai pentru această variantă teorema s-ar putea dovedi falsă.

Nu trebuie nici să exagerăm și nici să minimalizăm rolul figurii. Ar fi o exagerare să considerăm figura ca o parte componentă necesară a demonstrației. Din punct de vedere teoretic, orice demonstrație geometrică se poate efectua fără a folosi vreo figură și aceasta ar prezenta chiar avantajul de a îndepărta referirile la „evidență", care uneori este aparentă și constituie o sursă de greșeli. Dar, din punct de vedere practic, renunțarea la figură ar duce la aceleași dificultăți ca acelea pe care le-am întîmpina dacă am vrea, de exemplu, să efectuăm întotdeauna „în minte" operațiile cu numere cu mai multe cifre (sau pentru a lua un exemplu dintr-un domeniu mai îndepărtat, să jucăm șah „fără să privim tabla"); pericolul de a greși ar crește mult în acest caz. Vorbind despre ajutorul pe care figura îl dă demonstrației, am în vedere, desigur, o figură bună, executată cu destulă grijă. Elevul crede uneori că, dînd atenție figurii, el face numai o concesie exigențelor profesorului. În realitate, însă, lucrînd cu o figură incorectă, elevul se pedepsește în primul rînd pe sine pentru că, în loc de ajutor, el își creează uneori o piedică. Și acest elev să nu-și facă iluzii dacă, într-un caz sau altul, a reușit să facă demonstrația pe o figură incorectă: nu va fi așa întotdeauna. În această broșură, cititorul va întîlni, alături de figuri corecte, și altele întrucîtva deformate, dar cu bună știință. Atenția noastră se va concentra tocmai asupra demonstrațiilor eronate, iar pentru ele vor fi necesare uneori figuri inexacte (tot așa cum în demonstrațiile „prin reducere la absurd" se recurge la figuri deformate în mod intenționat).

În cele ce urmează, în capitolele I și III dăm o serie de exemple de demonstrații geometrice eronate. Despre tipurile de erori, preferăm să vorbim mai tîrziu, cînd vom avea la dispoziție aceste exemple. Dar trebuie să prevenim de pe acum pe cititor în ce privește caracterul propozițiilor demonstrate (greșit).

Printre aceste propoziții, se întîlnesc unele a căror falsitate este imediat evidentă cetitorului, de exemplu „un unghi drept este egal cu un unghi obtuz". În aceste cazuri problema constă în a descoperi eroarea în demonstrație. Asemenea demonstrații ale unor afirmații vădit incorecte, se cunosc încă din antichitate, sub denumirea de „sofisme".

În alte exemple, cetitorul nu va ști dinainte dacă afirmația de demonstrat este adevărată sau falsă, dacă nu a întîlnit-o cumva înainte. Aici problema noastră se complică: trebuie să verificăm atît inconsistența demonstrației, cît și caracterul eronat al afirmației[1]).

În sfîrșit, se vor da exemple de demonstrații a căror eroare își are originea în faptul că proprietatea de demonstrat nu poate fi dovedită în nici un fel cu mijloacele de care dispune cel care demonstrează. Voi încerca să explic cum se poate întîmpla aceasta, cu ajutorul unui exemplu care nu are legătură cu geometria și nici cu știința.

Se cunoaște problema distractivă: „Un vapor să găsește la 42°15′ latitudine nordică și 17° 32′ longitudine vestică (numerele sînt luate la întîmplare; de obicei se mai adaugă o serie de date care complică ipoteza). Cîți ani are căpitanul?" Pentru scopul nostru, vom modifica întrucîtva întrebarea din problemă: „Este adevărată afirmația că vîrsta căpitanului este de peste 45 de ani?". Oricui îi este clar că nu putem trage această concluzie din datele conținute în ipoteza problemei propuse și că orice încercare de a demonstra afirmația formulată cu privire la vîrsta căpitanului este condamnată la eșec. Mai mult, se poate arăta că demonstrația acestei afirmații este imposibilă. În adevăr, Direcția societății de navigație (despre care nu știm nimic din ipoteza problemei) poate să compună un itinerariu trecînd prin punctul geografic dat și să numească un căpitan de orice vîrstă (presupunînd că Direcția dispune pentru asemenea curse atît de căpitani tineri, cît și bătrîni).

Cu alte cuvinte, se poate presupune că vîrsta căpitanului este

---

[1]) Nu este suficient să facem numai primul lucru: deoarece și o afirmație adevărată poate fi justificată cu argumente false (de exemplu, din egalitatea falsă $3 + 5 = 12$, se poate trage concluzia corectă: $3 + 5$ este un număr par).

mai mică de 45 de ani și, desigur, aceasta nu va duce la nici o contradicție cu datele privind latitudinea și longitudinea. Altfel ar sta lucrurile, dacă ipoteza problemei ar mai conține și alte date, de exemplu numele vaporului și data exactă a trecerii lui prin punctul considerat; atunci am putea considera că jurnalul de bord ne va permite să stabilim identitatea căpitanului, iar apoi și vîrsta lui.

Așadar, există afirmații a căror valabilitate poate sau nu poate fi demonstrată, în funcție de mijloacele de care dispunem pentru demonstrație.

Revenind la obiectul nostru, punem întrebarea: este adevărat că suma unghiurilor oricărui triunghi este egală cu $2d$? Orice elev care a studiat capitolul „Drepte paralele“ cunoaște demonstrația acestei importante teoreme, dar puțini cunosc istoria ei de 2000 de ani. Demonstrația se bazează pe proprietățile unghiurilor formate de drepte paralele tăiate de o secantă, iar aceste proprietăți, la rîndul lor, se bazează pe așa numita „axiomă a paralelelor“: printr-un punct, situat în afara unei drepte, se poate duce la această dreaptă o dreaptă paralelă cu ea și *numai una*[1]). Din vremea lui Euclid, timp de mai bine de două milenii, s-au făcut încercări să se transforme această axiomă în teoremă, adică să se demonstreze afirmația, numai pe baza afirmațiilor care, la Euclid și în manualele noastre de școală, preced axioma paralelelor. Prin aceasta, s-a interzis să se introducă în locul acestei axiome o alta, oricît de evident ar părea conținutul ei. Toate aceste încercări au fost infructoase și au arătat numai că axioma paralelelor, dată mai sus, se poate înlocui în multe moduri prin alte axiome. În particular, dacă luăm ca axiomă una dintre proprietățile unghiurilor formate de două drepte paralele și de o secantă, sau teorema cu privire la suma unghiurilor unui triunghi, axioma paralelelor devine o teoremă. Și abia după 1820, marele nostru compatriot, matematicianul Nicolai Ivanovici Lobacevski (1792—1856) din Kazan, a reușit să descopere izvorul insuccesului tuturor încercărilor de a demonstra axioma paralelelor. El a construit o teorie cuprinzătoare și profundă despre care nu încerc aici să dau nici măcar o idee vagă. În această teorie, este conținută, printre altele, în formă implicită, demonstrația imposibilității de a demonstra axioma paralelelor așa cum au încercat să o facă mulți savanți pînă la Lobacevski (și în timpul

---

[1]) Atragem atenția asupra faptului, că natura axiomatică a acestei propoziții este dată de cuvîntul „numai“: că se poate întotdeauna duce o paralelă, se demonstrează înainte, de exemplu pe baza teoremei „două perpendiculare pe o aceeași dreaptă sînt paralele“.

vieții lui). Oricît ar fi de complicată teoria lui Lobacevski și, pe de altă parte, oricît ar fi de naivă problema privind vîrsta căpitanului, în ambele cazuri „demonstrația imposibilității demonstrației“ este de aceeași natură: pe exemple („modele“) concrete se constată că, din două judecăți contradictorii, atît una cît și cealaltă poate fi compatibilă cu aceleași date inițiale. În cazul axiomei noastre, aceasta înseamnă: din ceea ce, în cursul obișnuit de geometrie, precede axioma paralelelor, nu rezultă nici valabilitatea, nici falsitatea afirmației conținute în această axiomă.

Știm acum că orice demonstrație a axiomei paralelelor, sau a oricărei afirmații echivalente cu ea, este greșită, dacă se bazează numai pe propozițiile care preced această axiomă. Dăm în cele ce urmează mai multe exemple simple ale unor astfel de demonstrații greșite.

CAPITOLUL I

ERORI DE RAȚIONAMENT, ACCESIBILE ÎNCEPĂTORULUI

Trecem la expunerea unor exemple de demonstrații greșite, reamintind că analiza lor critică se face în cap. II. Cititorul a mai fost prevenit că figurile din această carte sînt executate cu unele deformări care, adesea, nu pot fi observate imediat.

Exemplul 1. *Pătratul de latură* 21 (cm) *are aceeași arie ca și dreptunghiul de laturi* 34 (cm) și 13 (cm).

Pătratul Q se împarte în două dreptunghiuri, de dimensiuni 13×21 și 8×21 (fig. 1; de aci înainte vom omite să mai scriem „cm"); primul dreptunghi este împărțit în două trapeze

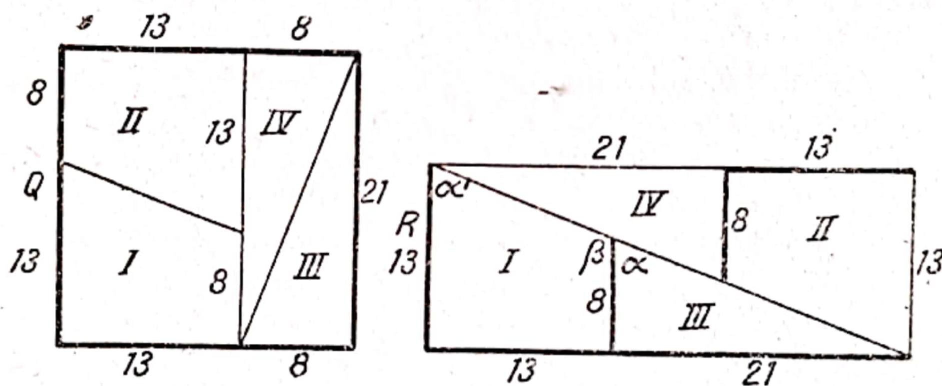


Fig. 1

dreptunghice egale, cu bazele 13 și 8, iar al doilea dreptunghi, în două triunghiuri dreptunghice egale, cu catetele 8 și 21. Din cele patru părți obținute, putem compune dreptunghiul R, așa cum se arată în fig. 1, dreapta (părțile corespunzătoare ale pătratului și ale dreptunghiului sînt notate cu aceleași cifre romane).

Mai exact, la trapezul dreptunghic I, alăturăm triunghiul dreptunghi III, astfel ca unghiurile drepte alăturate laturii comune 8 să fie adiacente; se formează un triunghi dreptunghic, cu catetele 13 și $13 + 21 = 34$. Compunem un triunghi egal cu primul din părțile II și IV; în sfîrșit, din cele două triunghiuri dreptunghice egale obținute formăm dreptunghiul R, cu laturile 13 și 34. Aria acestui dreptunghi este egală cu $34 \times 13 = 442$ (cm^2), în timp ce aria pătratului Q, constînd din aceleași părți, este $21 \times 21 = 441$ (cm^2). De unde a apărut un centimetru pătrat în plus? Recomandăm cititorului să facă o experiență: să decupeze din hîrtie (de preferință, dintr-una cu pătrățele, luînd, de exemplu, lungimea unui pătrățel drept un centimetru) pătratul Q, să-l taie în patru părți, respectînd exact dimensiunile indicate, și să compună din aceste părți dreptunghiul R.

Exemplul 2. *O demonstrație a axiomei paralelelor*

Fie dreapta AB și un punct C în afara ei; să se demonstreze că prin punctul C se poate duce o singură dreaptă paralelă cu AB. Vom recurge la construcția cunoscută: din punctul C, cobo-

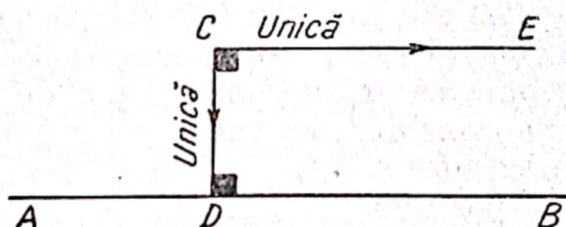


Fig. 2

rîm perpendiculara CD pe dreapta AB (fig. 2; aici și adesea în cele ce urmează, unghiurile drepte se înseamnă în figuri prin pătrățele negre); pe această perpendiculară ridicăm, în punctul C, perpendiculara CE. Aceasta va fi paralelă cu dreapta AB, în virtutea cunoscutei teoreme cu privire la două perpendiculare pe o aceeași dreaptă (să observăm că avem dreptul să ne referim aici la această teoremă, deoarece ea se demonstrează înainte de axioma paralelelor). Însă, dintr-un punct pe o dreaptă se poate coborî *o singură* perpendiculară, iar dintr-un punct situat pe o dreaptă se poate ridica, de asemenea, *o singură* perpendiculară pe această dreaptă (și una și alta se demonstrează înaintea axiomei paralelelor); deci, dreapta paralelă CE obținută este *unică*.

$= 2d$; deci, $\alpha + 2d \leqslant 2\alpha$, $\alpha \geqslant 2d$. Deoarece însă α nu poate fi mai mare decît $2d$, $\alpha = 2d$, adică suma unghiurilor unui triunghi ABC este egală cu $2d$.

Exemplul 6. *Toate triunghiurile sînt isoscele.*

Fie ABC un triunghi oarecare (fig. 5 sau 6 sau 7); să ducem bisectoarea unghiului C, apoi axa de simetrie a laturii AB (adică dreapta perpendiculară pe AB, în mijlocul M al segmentului AB) și să considerăm diferitele cazuri de poziție relativă a acestor drepte; deoarece considerăm numai o singură bisectoare și o singură axă de simetrie, ne vom permite să le numim, pur și simplu, „bisectoarea" și „axa".

C a z u l 1: *bisectoarea și axa nu se intersectează*, adică sînt sau paralele, sau se confundă. Deoarece axa este perpendiculară pe AB, urmează că și bisectoarea este perpendiculară pe AB, adică coincide cu înălțimea și, în acest caz, triunghiul ABC este isoscel ($CA = CB$).

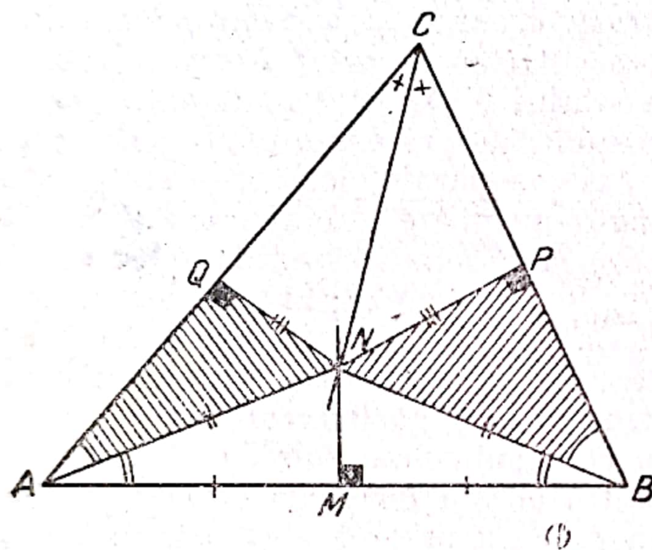


Fig. 5

C a z u l 2: *bisectoarea și axa se taie în interiorul triunghiului* ABC (fig. 5), fie în punctul N. Deoarece acest punct este egal depărtat de laturile unghiului ACB, coborînd din el perpendicularele NP și NQ, respectiv, pe CB și CA, avem $NP = NQ$. Dar punctul N este, în același timp, egal depărtat de extremitățile segmentului AB, adică $NB = NA$. Triunghiurile dreptunghice NPB și NQA au o catetă și ipotenuza egale, deci $\sphericalangle NAQ = \sphericalangle NBP$. Adăugînd la aceste două unghiuri egale unghiurile NAB și NBA, egale între ele (ca unghiuri la bază ale triunghiului isoscel ANB), obținem $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$, deci triunghiul ABC este isoscel (anume $CA = CB$).

C a z u l 3: *bisectoarea și axa se taie pe dreapta* AB, adică în mijlocul M al acestei laturi. Aceasta înseamnă că, în triunghiul ABC, mediana și bisectoarea duse din vîrful C coincid și, de aici, rezultă că acest triunghi este isoscel.

Observație. Prevenim pe cititor împotriva unei erori posibile. Este bine cunoscut că, pentru un triunghi isoscel, mediana și bisectoarea coincid. Dar noi nu ne referim aici la această afirmație, ci la cea reciprocă: „dacă într-un triunghi mediana și bisectoarea pornind dintr-un același vîrf coincid, triunghiul este isoscel". În această formulare, teorema reciprocă este de asemenea adevărată, dar demonstrația ei poate prezenta dificultăți pentru cititor; de aceea, dăm una dintre cele posibile. Să presupunem că în triunghiul ABC segmentul CM este în același timp mediană și bisectoare. Dacă se coboară din punctul M perpendicularele MP și MQ pe laturile CB și CA (se poate folosi fig. 5, considerînd punctele M și N confundate; dreapta MN devine inutilă, în acest caz), obținem triunghiurile dreptunghice egale MPB și MQA, iar apoi, din egalitatea unghiurilor MBP și MAQ, tragem concluzia că triunghiul ABC este isoscel. Acest raționament va fi incomplet, dacă nu vom arăta că punctele P și Q cad pe laturile CB și CA, și nu pe prelungirile lor. Unul dintre aceste puncte ar putea cădea pe prelungirea laturii respective, dacă unul dintre unghiurile A sau B ar fi obtuz. Fie, de exemplu, unghiul B obtuz, astfel încît punctul P se află pe prelungirea laturii CB; ca și înainte, obținem $\sphericalangle MAQ = \sphericalangle MBP$, dar acum aceasta duce la o contradicție deoarece primul dintre aceste unghiuri este interior triunghiului ABC, iar al doilea exterior, neadiacent cu primul.

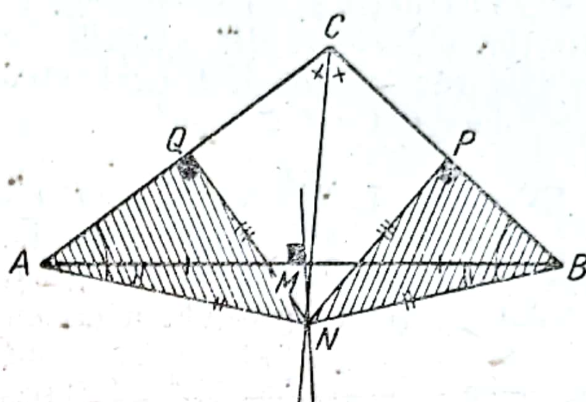


Fig. 6

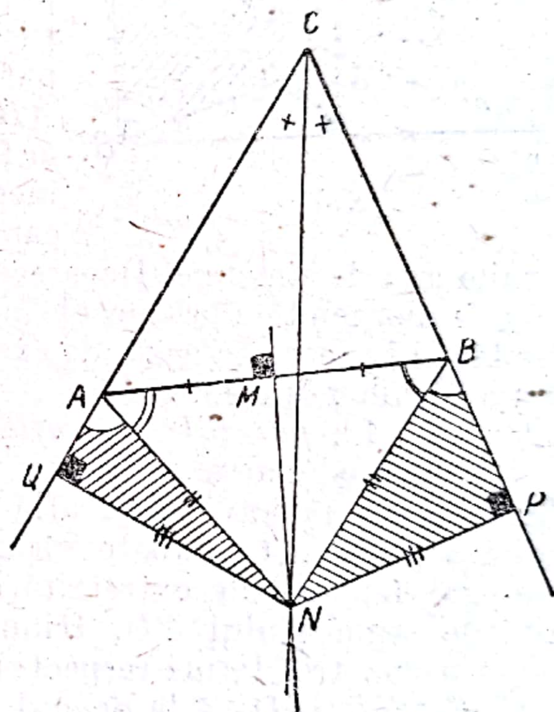


Fig. 7

Cazul 4a: *bisectoarea și axa se taie în afara triunghiului ABC; perpendicularele coborîte din punctul de intersecție N pe laturile CB și CA cad pe aceste laturi (fig. 6) și nu pe prelungirile lor.* Ca și înainte, obținem triunghiurile egale NPB și NQA și triunghiul isoscel NAB. Unghiurile la baza AB ale triunghiului ABC sînt acum egale ca diferențe (și nu ca sume, ca în cazul 2) ale unor unghiuri respectiv egale.

C a z u l 4 b: *bisectoarea şi axa se taie în afara triunghiului ABC; perpendicularele coborîte din punctul de intersecţie N pe laturile CB şi CA cad pe prelungirile acestor laturi* (fig. 7). Aceleaşi construcţii şi raţionamente duc la concluzia egalităţii unghiurilor exterioare din vîrfurile A şi B ale triunghiului ABC. De aici rezultă imediat egalitatea unghiurilor interioare A şi B, şi deci $CA = CB$.

Exemplul 7. *Un unghi drept este egal cu unul obtuz.*

Din extremităţile segmentului AB (fig. 8 sau 9), să ducem două segmente egale între ele AC şi BD, situate de aceeaşi parte a dreptei AB şi formînd cu ea unghiul drept DBA şi unghiul obtuz CAB; vom demonstra egalitatea acestor unghiuri.

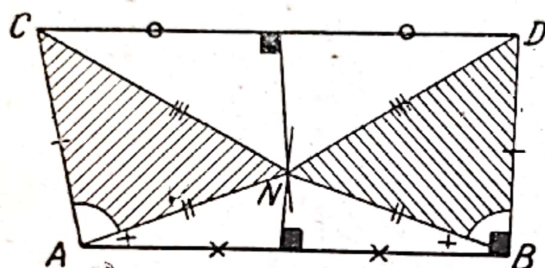


Fig. 8

Unind C cu D obţinem un patrulater $ABDC$, ale cărui laturi AC, BD evident nu sînt paralele, la fel ca şi laturile AB, CD (în caz contrar, $ABDC$ ar fi un trapez isoscel cu unghiuri inegale la baza AB). Pentru fiecare dintre segmentele AB, CD construim axa de simetrie. Deoarece segmentele nu sînt paralele, nici axele perpendiculare pe ele nu sînt paralele şi nici nu se confundă, ci se intersectează, de exemplu, în punctul N. Să examinăm cazurile posibile.

C a z u l 1: *punctul N se află „deasupra" dreptei AB*, mai exact, de aceeaşi parte a dreptei AB, cu patrulaterul $ABDC$ (v. fig. 8, unde punctul N se află în interiorul patrulaterului). Să unim acest punct cu toate vîrfurile patrulaterului; deoarece el este egal depărtat de extremităţile segmentului AB şi de extremităţile segmentului CD, triunghiurile NAC şi NBD sînt egale, ca avînd trei laturi respectiv egale. De unde rezultă că $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NBD$. Dacă la primul unghi adunăm unghiul NAB, iar la al doilea, unghiul NBA şi ţinem seama de faptul că $\sphericalangle NAB = \sphericalangle NBA$, conform proprietăţii triunghiului isoscel, ajungem la egalitatea $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$.

C a z u l 2: *punctul N se află pe AB*, adică este mijlocul segmentului AB. Demonstraţia precedentă se simplifică — egalitatea $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA$ se obţine din egalitatea triunghiurilor NAC şi NBD.

C a z u l 3: *punctul N se află „sub" AB*, adică nu este situat de aceeaşi parte a dreptei AB, cu patrulaterul $ABDC$ (fig. 9).

Tot din egalitatea triunghiurilor, se obține $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NBD$, dar acum din aceste unghiuri trebuie *scăzute* unghiurile NAB și NBA, egale între ele, după care se obține de asemenea

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA.$$

Fig. 9

Exemplul 8. *Dacă între elementele a două triunghiuri s-a stabilit o corespondență, astfel încît două laturi și unghiul opus uneia dintre ele, într-un triunghi, sînt egale cu elementele respective ale celuilalt triunghi, triunghiurile sînt egale.* Mai concis: două triunghiuri sînt egale dacă au două laturi respectiv egale și unul dintre unghiurile opuse acestor laturi egal.

Să presupunem că despre triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ (fig. 10, 11 sau 12) se știe că: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1$; să demonstrăm egalitatea lor. În acest scop, vom folosi o metodă cunoscută din demonstrația obișnuită a egalității triunghiurilor, în cazul egalității tuturor laturilor: Să alipim triunghiul $A_1B_1C_1$ la triunghiul ABC, astfel încît extremitățile laturilor egale (anume cele opuse unghiurilor egale prin ipoteză) AB și A_1B_1 să coincidă (A cu A_1 și B cu B_1); atunci triunghiul $A_1B_1C_1$ (răsturnat) va ocupa poziția ABC_2. Unind punctele C și C_2, să considerăm cele trei cazuri posibile.

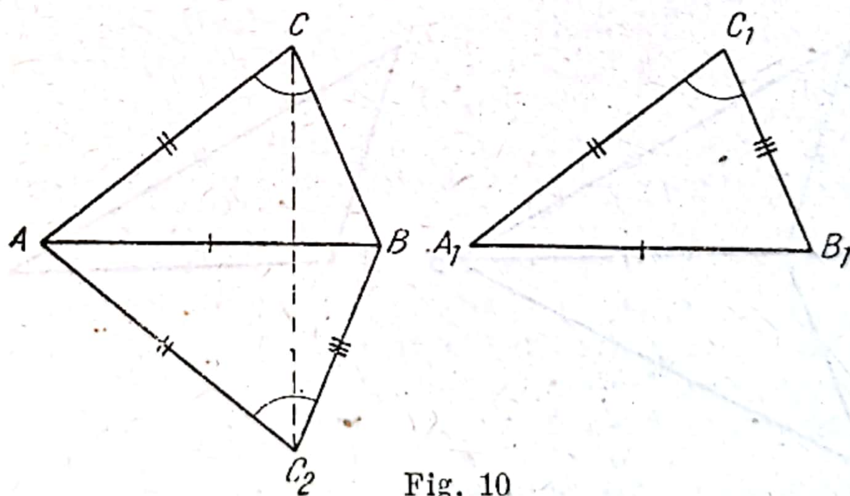


Fig. 10

C a z u l 1: *dreapta CC_2 intersectează latura AB într-un punct interior* (fig. 10). Triunghiul ACC_2 este isoscel, deci

$\sphericalangle ACC_2 = \sphericalangle AC_2C$; scăzînd aceste unghiuri egale respectiv din unghiurile ACB şi AC_2B, egale prin ipoteză, obţinem: $\sphericalangle BCC_2 = \sphericalangle BC_2C$. Ultima egalitate ne arată că triunghiul CBC_2 este de asemenea isoscel, anume $CB = C_2B$, deci $CB = C_1B_1$ şi trunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sînt egale, ca avînd toate laturile respectiv egale.

C a z u l 2: *dreapta CC_2 intersectează prelungirea laturii AB dincolo de punctul B* (fig. 11). Raţionamentul rămîne cel precedent,

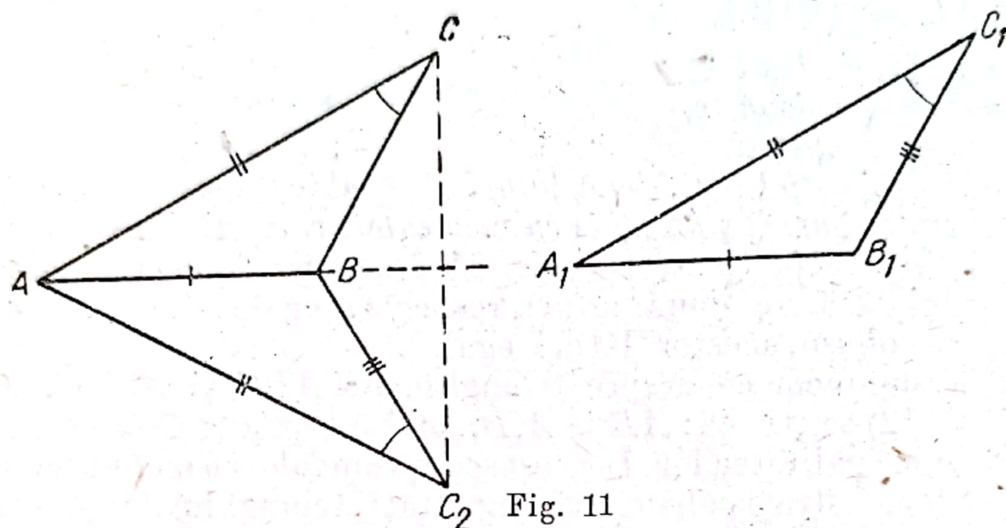


Fig. 11

se schimbă doar ordinea de scădere: din unghiurile egale ACC_2 şi AC_2C, se scad unghiurile egale ACB şi AC_2B.

C a z u l 3: *dreapta CC_2 taie prelungirea laturii AB dincolo de punctul A* (fig. 12). Raţionamentul este acelaşi ca în cazul 1, cu

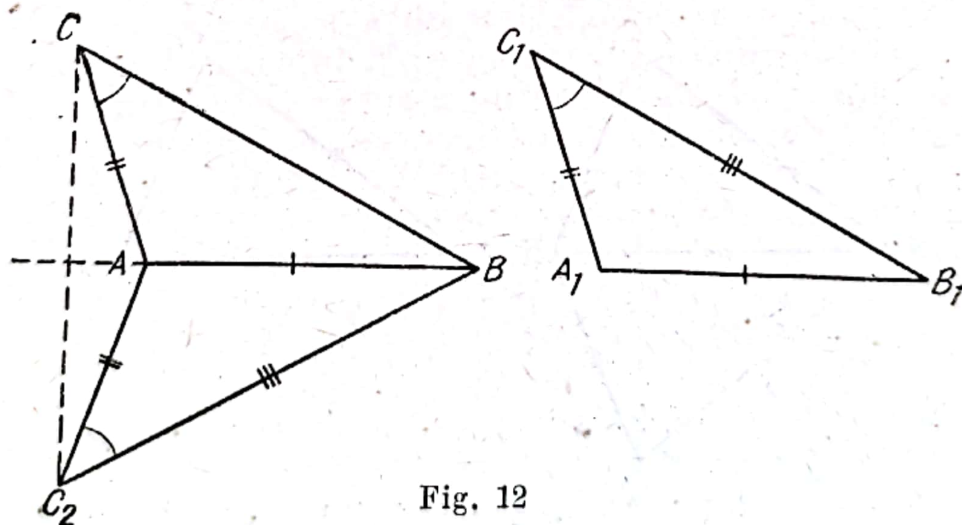


Fig. 12

singura deosebire că scăderea se înlocuieşte prin adunare: la unghiurile egale ACC_2 şi AC_2C, se adaugă unghiurile egale ACB şi AC_2B.

Exemplul 9: *Orice dreptunghi înscris într-un pătrat este tot un pătrat*[1]).

Mai exact: dacă dreptunghiul $MNPQ$ (fig. 13) este înscris în pătratul $ABCD$, astfel încît pe fiecare latură să se afle un vîrf al dreptunghiului (în cazul nostru, M pe AB, N pe BC, P pe CD, Q pe DA), acesta din urmă este de asemenea un pătrat. Pentru demonstrație, să coborîm perpendicularele PR și QS din P și Q respectiv pe AB și BC. Aceste perpendiculare sînt egale între ele (sînt egale cu latura pătratului $ABCD$). Ele sînt catete în triunghiurile PRM și QSN, în care ipotenuzele sînt de asemenea egale între ele ca diagonale ale dreptunghiului $MNPQ$; de unde rezultă egalitatea triunghiurilor (hașurate în figură) și apoi și egalitatea unghiurilor:

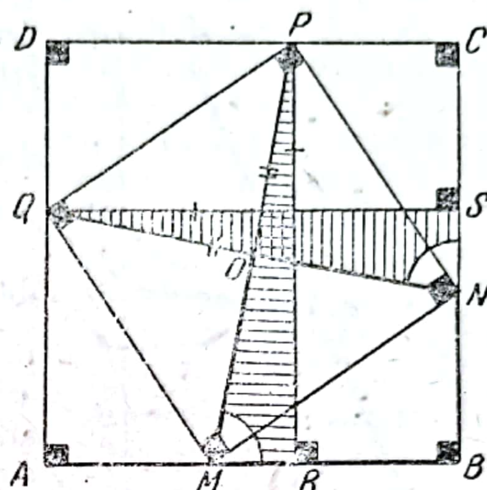


Fig. 13

$$\sphericalangle PMR = \sphericalangle QNS.$$

Să considerăm acum patrulaterul $MBNO$ (în figură este trasat cu linii groase; O este punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului $MNPQ$); unghiul lui exterior la vîrful N este egal cu cel interior la vîrful M, deci suma unghiurilor interioare la vîrfurile M și N este $2d$. Aceeași trebuie să fie suma unghiurilor interioare la vîrfurile B și O, dar unul dintre ele ($\sphericalangle B$) este drept, deci și unghiul O este drept, adică diagonalele dreptunghiului sînt perpendiculare; deoarece aceasta este proprietatea care caracterizează, printre dreptunghiuri, pătratul, demonstrația este terminată.

Exemplul 10. *O perpendiculară și o oblică la aceeași dreaptă nu se intersectează.* Aceasta este o variantă a unui sofism antic, care a ajuns la noi mulțumită matematicianului grec Proclus (sec. V. e. n.[2]). Să precizăm în ce constă afirmația noastră:

---

[1]) Sperăm că niciunul dintre cititori nu va vedea o contradicție în alăturarea cuvintelor „dreptunghi... este... pătrat“. Desigur, nu toate dreptunghiurile sînt pătrate, dar unele dintre ele sînt.

[2]) Pentru expunerea acestui sofism la Proclus, vezi B o n o l a , Geometria neeuclidiană, SPB, 1905, p. 5, trad. rusă.

în punctele A şi B ale dreptei AB (fig. 14), se construiesc, de aceeaşi parte a ei, două raze (spre a sublinia că sînt raze, în figură s-a marcat sensul lor prin săgeţi): AQ face un unghi ascuţit BAQ cu dreapta AB, iar BP este perpendiculară pe AB; vom demonstra că aceste raze nu se intersectează.

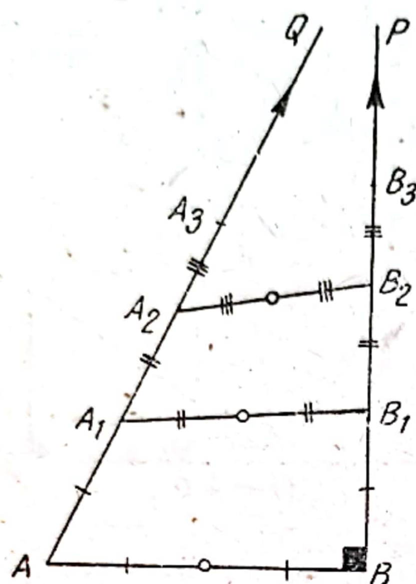


Fig. 14

Să împărţim segmentul AB în două şi să aşternem pe fiecare dintre razele AQ, BP, lungimea $\frac{1}{2}AB$; aşa dar, $AA_1 = BB_1 = \frac{1}{2}AB$. Intersecţia perpendicularei cu oblica nu poate avea loc pe segmentele AA_1 şi BB_1, adică segmentele AA_1 şi BB_1 nu pot avea un punct comun. Într-adevăr dacă ar exista un astfel de punct comun (K), s-ar obţine un triunghi (AKB), în care suma a două laturi ($AK + KB$) este mai mică decît a treia latură (AB) sau este egală cu ea, ceea ce este imposibil. Unind punctele A_1 şi B_1, repetăm construcţia precedentă: de la punctele A_1 şi B_1, să aşternem pe fiecare dintre razele AQ şi BP, în acelaşi sens, mărimea $\frac{1}{2} A_1B_1$; vom avea $A_1A_2 = B_1B_2 = \frac{1}{2} A_1B_1$. Din consideraţiile expuse mai sus, rezultă că segmentele A_1A_2 şi B_1B_2 nu pot avea un punct comun şi, în particular, A_2 nu poate coincide cu B_2. În acest caz, împărţim segmentul A_2B_2 în două, aşternem $A_2A_3 = B_2B_3 = \frac{1}{2} A_2B_2$ etc. (trebuie să subliniem în mod deosebit că aşternerea segmentelor egale $A_nA_{n+1} = B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}A_nB_n$ pe o rază şi pe alta se face, de fiecare dată, în sensul razei, deci nu întîlneşte nici o piedică. Procesul se prelungeşte indefinit; el ar putea să se întrerupă, dacă ar dispare segmentul A_nB_n, adică dacă ar coincide punctele A_n şi B_n, de acelaşi indice, dar, după cum am văzut, acest lucru este imposibil (de altfel imposibilitatea acestei coincidenţe este clară direct din faptul că s-ar obţine atunci un triunghi dreptunghic la care ipotenuza AA_n ar fi egală cu cateta BB_n). Deci, la fiecare pas al acestui proces infinit, intersecţia perpendicularei cu oblica nu are loc, aşadar ea nu are loc niciodată.

Am trecut în revistă o serie de raționamente care, uneori, par nu mai puțin convingătoare decît demonstrațiile dintr-un manual de geometrie. În unele cazuri, aceste raționamente au drept scop demonstrarea unor absurdități evidente; în alte cazuri, neadevărul celor demonstrate nu apare dintr-o dată, dar la fiecare exemplu cititorul a fost prevenit că se comite o eroare. A venit momentul să dăm la iveală aceste erori.

Înainte de a ne ocupa (în cap. II) de analiza tuturor exemplelor date pînă acum, invit în mod insistent pe cititori să încerce a găsi eroarea din fiecare caz prin propriile lor forțe. Poate că aceasta nu va reuși, nici totdeauna, nici tuturor și nici în mod complet; dar chiar în cazul insuccesului, analiza aprofundată a unui exemplu oarecare pregătește un teren bun pentru citirea celor ce se spun despre acest exemplu în cap. II. Iar în caz de succes, probabil că cititorul va dori să compare interpretarea sa cu cele expuse în cap. II. Propunînd această muncă, în care majoritatea cititorilor nu au experiență, consider util să dau unele indicații și sfaturi preliminare.

1. A infirma o demonstrație geometrică incorectă înseamnă a-i găsi o eroare logică. Dificultatea constă în aceea că o astfel de demonstrație este corectă aproape peste tot, dar conține în mod obligatoriu undeva o lacună — și pe aceasta urmează s-o descoperim.

2. Criticînd o demonstrație, se indică adesea că ea a fost făcută „pe o figură greșită". Aceasta nu este o formulare prea fericită; în nici un caz, nu trebuie să ne mărginim la ea. Atunci cînd spunem că figura *A* este falsă și trebuie înlocuită prin figura *B*, aceasta exprimă de obicei următoarea stare de lucruri: demonstrația nu ia în considerare toate cazurile posibile (și aceasta este o greșeală logică!); se iau în considerare și se reprezintă în fig. *A* tocmai cazurile care se dovedesc ulterior în contradicție cu ipoteza teoremei și se omit cele (fig. *B*) compatibile cu această ipoteză. Așadar, sursa erorii nu stă în figură, ci în enumerarea incompletă a cazurilor posibile.

3. Dacă în fig. *A* este reprezentat un caz care duce la o concluzie absurdă, este suficient să arătăm că în fig. *B* nu ajungem la această concluzie, pentru a socoti demonstrată indirect („prin reducere la absurd") imposibilitatea cazului *A*. În asemenea împrejurări, este de dorit (dar nu obligatoriu!) să obținem și o demonstrație directă a faptului că ipoteza teoremei duce cu necesitate la cazul *B* (în cap. II, se dau modele de astfel de demonstrații).

4. Deși figura în sine nu poate să dovedească nici justețea unei afirmații și nici falsitatea ei, trebuie totuși să recomandăm

ca figurile să fie executate cît se poate de exact (cu instrumente). Acolo unde avem de-a face cu un sofism evident, este util să facem figura astfel, încît ea să sublinieze net absurditatea concluziei; astfel, în exemplul 7, să reprezentăm unghiul obtuz apropiat de 180°; în exemplul 10, să figurăm perpendiculara și oblica intersectîndu-se în limitele figurii etc. O astfel de figură ne poate sugera în ce direcție să căutăm eroarea.

5. În unele cazuri, eroarea nu are nimic comun cu figura, ci constă, de exemplu, în următoarele: se demonstrează (corect) nu afirmația pe care am început s-o demonstrăm, ci una înrudită, iar cel care demonstrează nu observă substituția făcută, sau consideră că ea nu va fi observată de alții.

6. Cînd nu știm dacă afirmația de demonstrat este adevărată, este mai bine (dar nu obligatoriu) să începem cu clarificarea acestei chestiuni. Trebuie să avem în vedere că o afirmație este infirmată, dacă se construiește măcar un singur exemplu care o contrazice.

Sensul indicațiilor date îi va fi mai clar cititorului după ce va efectua munca personală propusă și va citi capitolul următor. De aceea recomand să revenim la aceste indicații în cursul lecturii cap. II și să medităm asupra lor încă o dată după terminarea ei.

CAPITOLUL II

ANALIZA EXEMPLELOR TRATATE ÎN CAPITOLUL I

La exemplul 1. Afirmînd că din părțile *I, II, III, IV* ale pătratului poate fi compus un dreptunghi, ne încredem în evidența aparentă sau într-o experiență grosolan efectuată (dacă am decupat din hîrtie). Pe ce bază putem considera că figurile *I* și *III*, alipite (sau, ceea ce este același lucru, *II* și *IV*), formează un triunghi adică că latura înclinată a trapezului *I* și ipotenuza triunghiului *III* formează, în acest caz, o dreaptă și nu o linie „frîntă" în punctul comun al acestor segmente? Faptul că nu vedem această „frîngere" în figură, sau că nu o observăm la decuparea din hîrtie, nu poate desigur servi drept argument: chiar lăsînd la o parte imperfecțiunea percepțiilor noastre vizuale, observăm că acestea se referă nu la figuri geometrice, ci la modelele

lor fizice și deci nu sînt potrivite pentru demonstrații geometrice riguroase[1]).

Este suficient să descoperim această lacună, pentru ca să recunoaștem că întreaga demonstrație este inconsistentă și chiar să refuzăm s-o studiem mai departe, atîta timp cît această lacună nu este împlinită. Dar noi nu vom merge pe acest drum, ci vom încerca să clarificăm pînă la capăt problema „frîngerii".

Dacă, de exemplu, am reuși să demonstrăm că unghiurile α și β din fig. 1 dau ca sumă $2d$ sau, în loc de aceasta, că unghiurile α și α' din aceeași figură sînt egale între ele, atunci absența „frîngerii" ar fi dovedită și demonstrația ar reintra în drepturile ei. Este acest lucru posibil? Raționînd în mod indirect, prin reduceri la absurd, urmează să răspundem negativ la această întrebare, deoarece răspunsul pozitiv ne-ar duce la egalitatea $441=442$.

De altfel, putem să ne convingem și în mod direct de inegalitatea unghiurilor α și α' și, totodată, să lămurim care dintre ele este mai mare. Cele cîteva rînduri care urmează pot fi înțelese de cititorul care cunoaște cît de puțină trigonometrie, de exemplu, atîta cît se face în clasa a VIII-a a școlii medii (în loc de trigonometrie, s-ar putea folosi proprietățile triunghiurilor asemenea). Din triunghiul *III* fig. 1, obținem tangenta unghiului α:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{21}{8}$$

Dacă în trapezul *I* coborîm perpendiculara (care nu este arătată în fig. 1) din vîrful unghiului β pe baza mare, se formează un triunghi dreptunghic cu catetele 13 și $13-8=5$, din care deducem

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{13}{5}$$

Și, deoarece, $\frac{21}{8} > \frac{13}{5}$, mai precis $\frac{21}{8} - \frac{13}{5} = \frac{1}{40}$, rezultă $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha'$ și

$$\alpha > \alpha', \quad \alpha + \beta > 2d.$$

---

[1]) În istoria omenirii, acest lucru nu a fost înțeles chiar dintr-o dată. Într-un vechi templu indian, de prin anul 1000 î.e.n., s-au găsit — cu ocazia unor săpături arheologice — unele inscripții matematice, printre care o figură geometrică reprezentată pe un perete. Figura se referea, probabil, la regula pentru aflarea ariei cercului. În loc de demonstrație, lîngă figură era scris „Privește".

Acum situaţia este clară: părţile *I*, *II*, *III*, *IV* ale pătratului se pot aşeza în adevăr în interiorul dreptunghiului, dar ele nu acoperă complet acest dreptunghi, ci lasă un „gol“, de forma unui paralelogram foarte îngust, o „fantă“, care merge de-a lungul diagonalei dreptunghiului. Nu trebuie să ne mire că nu observăm această fantă: deoarece pe lungimea ei de 36,4... (cm), ea

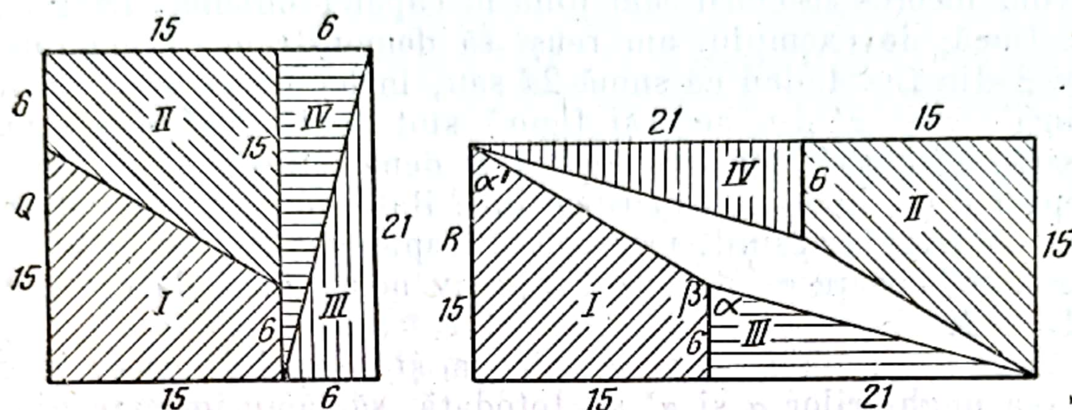


Fig. 15

ocupă în totul o arie de 1 (cm²), tocmai prisosul care a rezultat la trecerea de la pătratul *Q* la dreptunghiul *R*. Cititorul care vrea să-şi facă o imagine şi mai intuitivă nu are decît să schimbe datele numerice din fig. 1, de exemplu, în fig. 15, unde „fanta“ are o arie de 99 (cm²) faţă de aria de 540 (cm²) a întregului dreptunghi.

La exemplul 2. Eroarea comisă aici este dintre cele mai răspîndite şi cunoscută încă în logica clasică, sub o complicată denumire latină („ignoratio elenchi“) care, în traducere liberă, sună: „neînţelegerea a ceea ce s-a demonstrat“. În adevăr, ce se dovedeşte prin raţionamentul la care se referă fig. 2? Se demonstrează numai că, dacă se construieşte o dreaptă paralelă prin procedeul descris acolo, (cu ajutorul a două perpendiculare) se obţine

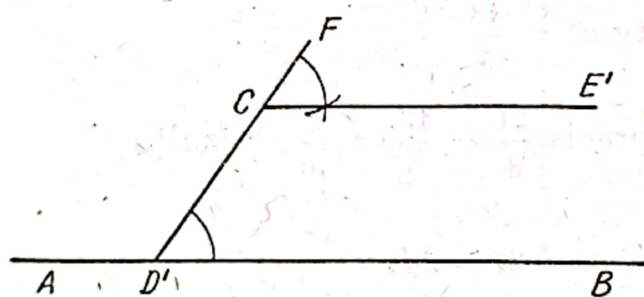


Fig. 16

o dreaptă unică. Dar este acest procedeu unic? Nu, se ştie bine că există alte construcţii care conduc la acelaşi rezultat. De exemplu, în locul piciorului *D* al perpendicularei *CD*, (v.

fig.2), am putea să luăm orice alt punct D' (fig. 16) pe dreapta AB, să-l unim cu C prin dreapta $D'F$ şi să construim, în punctul C al razei CF, unghiul FCE' egal cu unghiul $CD'B$ (astfel încît razele CE' şi $D'B$ să fie de aceeaşi parte a lui FD'). În virtutea teoremei (demonstrate înaintea axiomei) cu privire la paralelismul dreptelor în cazul egalităţii unghiurilor corespondente, se poate afirma că dreapta CE' este paralelă cu AB. Dar ce ne garantează că dreptele CE din fig. 2 şi CE' din fig. 16 coincid? A afirma că diferite construcţii duc la o aceeaşi dreaptă[1]) înseamnă a admite fără demonstraţie ceea ce voiam să demonstrăm.

La exemplul 3. Să precizăm presupunerile noastre: oricare ar fi dreptele paralele şi secanta, oricare ar fi perechea de unghiuri interne de aceeaşi parte a secantei, suma acestor unghiuri este sau totdeauna mai mare decît $2d$, sau totdeauna mai mică decît $2d$, sau totdeauna egală cu $2d$. Dar aici numai la prima vedere s-au epuizat toate cazurile posibile: s-a scăpat din vedere posibilitatea ca suma unghiurilor interne de aceeaşi parte a secantei să fie uneori mai mare, uneori mai mică, iar uneori poate chiar egală cu $2d$. Această presupunere nu duce la nici o contradicţie. De exemplu, dacă presupunem că $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 > 2d$, iar $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 < 2d$ (v. fig. 3), aceasta nu împiedică să avem $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 = 4d$.

Să observăm că, fără a intra în analiza amănunţită a demonstraţiei, am putea să arătăm de la început inconsistenţa ei, după un criteriu exterior: această demonstraţie nu foloseşte absolut de loc faptul că dreptele AB şi CD sînt paralele. Dacă ea ar fi adevărată, ar fi demonstrată următoarea teoremă: „dacă două drepte oarecare sînt tăiate de o a treia, suma unghiurilor interne de aceeaşi parte a secantei este egală cu $2d$“, şi aceasta este cu siguranţă neadevărat. Tocmai în acest caz, cînd renunţăm la presupunerea că dreptele AB şi CD sînt paralele, în mod obişnuit se va realiza a patra posibilitate, omisă în demonstraţia pe care am infirmat-o: de o parte a secantei, suma unghiurilor va fi mai mare, iar de cealaltă parte mai mică decît $2d$.

La exemplul 4. Ne-am obişnuit cu faptul că suma unghiurilor unui triunghi este aceeaşi (anume $2d$) pentru toate triunghiurile, indiferent de forma sau de dimensiunile lor; de aceea, cei mai mulţi dintre noi nu protestează cînd aud: „vom nota prin x suma unghiurilor unui triunghi (oarecare)“. Însă,

[1]) Se ştie că, în geometria lui Lobacevski, dreptele CE şi CE' nu coincid.

în momentul în care demonstrăm teorema care ne interesează, nu ştim nimic despre suma unghiurilor unui triunghi şi nu avem nici un motiv să presupunem că ea este aceeaşi pentru toate triunghiurile. Desigur, am putea să admitem, fără demonstraţie, că suma este aceeaşi şi atunci raţionamentul dat ar demonstra în adevăr că această sumă este egală cu $2d$. Dar aceasta ar însemna numai că, în locul axiomei paralelor, am introdus o altă axiomă care nu oferă, faţă de prima, nici un fel de avantaje.

La exemplul 5. În istoria matematicii, se cunosc mai multe cazuri în care s-a comis o aceeaşi eroare: s-a admis, fără motiv, că printre numerele unei mulţimi infinite trebuie să existe unul care să fie cel mai mare (în alte cazuri, unul care să fie cel mai mic). De altfel, nimănui nu-i trece prin minte să caute pe cel mai mare dintre numerele 1, 2, 3, ... ale şirului natural. Dar lipsa unui astfel de număr se explică prin aceea că numerele cresc aici mereu şi acest şir nu are sfîrşit. Dar şirul fracţiilor al căror numărător este cu o unitate mai mic decît numitorul

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

se poate, de asemenea prelungi nemărginit, adunînd de fiecare dată cîte o unitate la numărător şi la numitor; ca şi în primul caz, numerele vor creşte, dar printre ele nici unul nu este cel mai mare. În general, nu există o fracţie subunitară care să fie cea mai mare.

Următorul exemplu din geometrie este mai apropiat de al nostru: unghiul interior al unui poligon regulat[1]), egal cu $\frac{2d(n-2)}{n}$ unde n este numărul laturilor, este întotdeauna mai mic decît $2d$, dar nu există poligon regulat cu cel mai mare unghi interior.

În demonstraţia analizată, punctul slab îl constituie tocmai afirmaţia că printre triunghiurile despre care ştim numai că suma unghiurilor fiecăruia dintre ele nu este mai mare de $2d$, există un triunghi cu cea mai mare sumă a unghiurilor. Aceasta este o afirmaţie nedemonstrată, pe care am putea-o lua drept o nouă axiomă, în locul axiomei paralelelor.

Reunind rezultatele obţinute în urma analizei exemplelor 4 şi 5, ajungem la concluzia: se poate demonstra că suma unghiurilor unui triunghi este egală $2d$, făcînd astfel ca axioma

---

[1]) Astfel se numesc poligoanele care au toate laturile şi toate unghiurile egale.

paralelelor să fie de prisos, dacă admitem, fără demonstrație, una dintre următoarele două afirmații: 1) în toate triunghiurile, suma unghiurilor este aceeași; 2) există un triunghi (cel puțin unul) avînd cea mai mare sumă a unghiurilor.

La exemplul 6. Nu s-au luat în considerare toate cazurile posibile (cu privire la ultimele două cuvinte este util să ne amintim de cele spuse în nota de la p. 12, anume nu s-a luat în seamă posibilitatea ca, dintre cele două perpendiculare NP și NQ, una să cadă pe o latură a triunghiului ABC, iar cealaltă pe prelungirea unei laturi (fig. 17, unde deocamdată nu trebuie să ne ocupăm de cerc). Dacă acest caz are loc, unul dintre unghiurile de la baza AB a triunghiului ABC este diferența a două unghiuri, iar celălalt este suplimentul sumei acelorași unghiuri; de aici, se înțelege, nu se pot trage nici un fel de concluzii cu privire la unghiurile de la bază, deci nici cu privire la egalitatea laturilor. Este suficient să stabilim această lacună în demonstrație pentru ca să-i recunoaștem inconsistența. Mai mult, dacă triunghiul dat este *neisoscel*, se poate demonstra (raționînd prin reducere la absurd) că toate cazurile considerate (fig. 5, 6, 7) sînt imposibile, iar unicul caz posibil (fig. 17) a fost omis[1]).

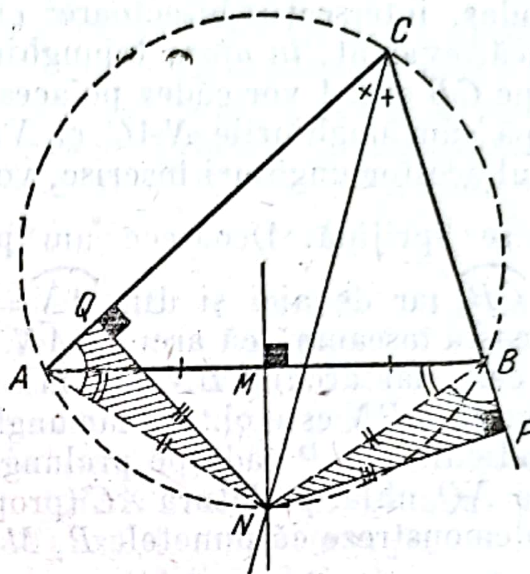


Fig. 17

De altfel, vom da acum o demonstrație directă a faptului că, într-un triunghi neisoscel, poziția părților figurii este tocmai

[1]) La prima vedere, s-ar putea crede că au fost omise și cazurile în care punctul N se află în interiorul sau pe baza triunghiului, iar punctele P și Q se află de părți diferite ale lui AB (se înțelege, nu este nimic imposibil în afirmația că perpendiculara coborîtă dintr-un punct interior al unui triunghi pe o latură a lui cade pe prelungirea laturii; ajunge să ne gîndim la un triunghi obtuzunghi). Dar, în textul imediat următor, se va arăta că, pentru un triunghi neisoscel, intersecția axei cu bisectoarea nu poate avea loc decît în afara triunghiului. Cititorul care cunoaște teorema „bisectoarea unui unghi al unui triunghi împarte latura opusă în părți proporționale cu celelalte două laturi“ poate încerca să stabilească pe altă cale această proprietate a punctului de intersecție.

aceea reprezentată în fig. 17. În adevăr, fie $CA > CB$. Să circumscriem triunghiului ABC un cerc; conform proprietății unghiurilor inscrise, bisectoarea unghiului C trebuie să treacă prin mijlocul N al arcului AB, pe care se sprijină acest unghi. Dar prin același mijloc N trebuie să treacă axa de simetrie a coardei AB Așadar, intersecția bisectoarei cu axa are loc pe cercul descris adică, evident, *în afara* triunghiului ABC. Perpendicularele din N pe CB și CA vor cădea pe aceste laturi sau pe prelungirile lor, după cum unghiurile NAC și NBC sînt ascuțite sau obtuze. În locul acestor unghiuri înscrise, vom considera arcele pe care acestea se sprijină. Deoarece am presupus $CA > CB$, avem $\overset{\frown}{CA} > \overset{\frown}{CB}$, iar de aici și din $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{BN}$ rezultă că $\overset{\frown}{CAN} > \overset{\frown}{CBN}$. Aceasta înseamnă că arcul CAN este mai mare decît o jumătate de cerc, iar arcul CBN mai mic decît o jumătate de cerc, deci unghiul CBN este obtuz, iar unghiul CAN este ascuțit. Deci, perpendiculara NP cade pe prelungirea laturii CB, iar penpendiculara NQ chiar pe latura AC (propunem cititorilor, ca exercițiu, să demonstreze că punctele P, M, Q se află pe o aceeași dreaptă).

La exemplul 7. Demonstrația pare, la început, convingătoare deoarece creează iluzia că s-ar fi considerat toate cazurile esențial diferite[1]) (punctul N se află dedesubtul dreptei AB, deasupra ei și pe ea). Totuși, în exemplul nostru, desfășurarea demonstrației nu depinde *numai* de poziția punctului N. Se poate observa că, în cazul 3, unghiul drept ABD adunat cu unghiul ascuțit ABN va da întotdeauna unghiul obtuz DBN; dar în ce privește unghiul obtuz CAB, se poate presupune că, adunat cu unghiul ascuțit NAB va da tot un unghi obtuz (fig. 9), dar poate să dea și unul „supraobtuz" (adică mai mare decît 180°, fig. 18), ceea ce schimbă radical situația.

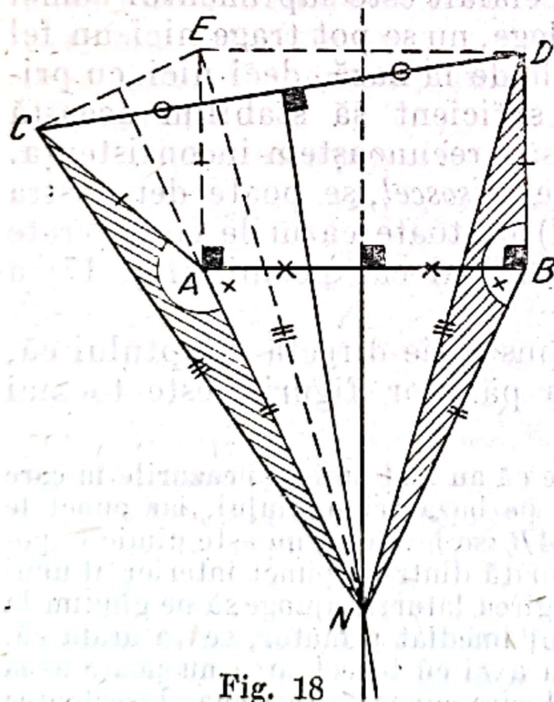


Fig. 18

---

[1]) Două cazuri trebuie considerate ca esențial diferite, dacă demonstrația valabilă pentru un caz nu poate fi repetată întocmai pentru celălalt.

Așadar, este necesar să deosebim în cazul 3 două variante: unghiul obtuz CAB și triunghiul CAN se află 1) de aceeași parte, (fig. 9) a dreptei AC, 2) de o parte și cealaltă (fig. 18 unde, la început, nu trebuie să dăm atenție liniilor întrerupte). Prima variantă în care unghiul CAB este o parte a unghiului CAN, a fost studiată și duce la egalitatea unghiurilor DBA și CAB. A doua variantă însă nu duce la această concluzie: unghiul drept DBA se prezintă ca și mai înainte ca *diferență* a două unghiuri ($\sphericalangle DBN$ și $\sphericalangle ABN$), iar unghiul obtuz CAB completează pînă la $4d$ *suma* a două unghiuri ($\sphericalangle CAN$ și $\sphericalangle BAN$). Raționînd prin reducere la absurd, trebuie să ajungem la concluzia că a doua variantă este singura posibilă.

Să facem o construcție auxiliară care să permită să ne dăm seama mai bine de poziția părților figurii. Din punctul A, ridicăm o perpendiculară pe AB (acum intervin și liniile întrerupte din fig.18), așternem pe ea segmentul AE, egal cu BD și de același sens cu el; evident, avem de asemenea $AE = AC$. Unim E cu punctele D, N și C; deoarece $ABDE$ este un dreptunghi, axa de simetrie a segmentului AB va fi axă de simetrie și pentru segmentul ED, deci $NE = ND$, și de aici $NE = NC$. Prin urmare, fiecare dintre punctele A și N este egal depărtat de extremitățile segmentului CE, deci dreapta AN este axă de simetrie pentru acest segment. Triunghiul DBN trece, printr-o simetrie în raport cu axa de simetrie a segmentului AB, în triunghiul EAN (avînd o orientare opusă[1]), iar acesta din urmă, printr-o simetrie în raport cu dreapta AN, trece în triunghiul CAN (orientat la fel ca triunghiul DBN). Așadar, CAN se obține din DBN printr-o rotație a acestuia din urmă, în jurul vîrfului N, cu unghiul BNA ($= EAC$, adică egal cu diferența între unghiul obtuz și cel drept luate la început).

La exemplul 8. Să ne convingem, în primul rînd, că teorema nu este adevărată. Pentru aceasta, este suficient să aducem un „contra exemplu“, adică să indicăm un caz în care ipoteza teoremei este satisfăcută, dar concluzia nu. Obținem un astfel de exemplu, dacă împărțim în două un triunghi isoscel oarecare LMN ($LN = MN$, fig. 19) prin segmentul NP pornind de la vîrf, dar *diferit de mediană*. Triunghiurile obținute LNP și MNP (corespondența se stabilește prin ordinea de enumerare a vîrfurilor) au latura NP comună și, în plus, $LN = MN$ și $\sphericalangle L = \sphericalangle M$;

[1]) Cititorul care nu posedă noțiunea de „orientare a unui triunghi“ poate fie să nu țină seamă de cuvintele de paranteză, fie să recurgă la bibliografie.

ipoteza teoremei este satisfăcută, în timp ce triunghiurile sînt, bineînțeles, neegale (în primul rînd pentru că $LP \neq MP$).

Dar, chiar fără să știm dacă teorema este adevărată sau nu, putem observa o lacună în demonstrație, constînd în faptul (revenim la notațiile din fig. 10 — 12) că s-au omis cazurile în care dreapta CC_2 trece printr-una dintre extremitățile segmentului AB (A sau B) adică laturile CA și C_2A sau CB și C_2B sînt una în prelungirea celeilalte.

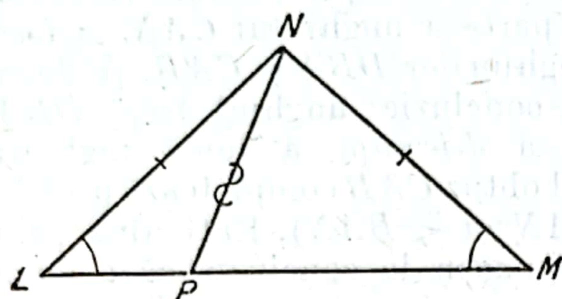


Fig. 19

În primul dintre aceste două cazuri (în fig. 20 laturile egale AC și AC_2 sînt în prelungire) concluzia teoremei este totuși adevărată: după alipirea triunghiului $A_1B_1C_1$ la ABC, obținem triunghiul BCC_2 isoscel în virtutea egalității unghiurilor C și C_2, deci

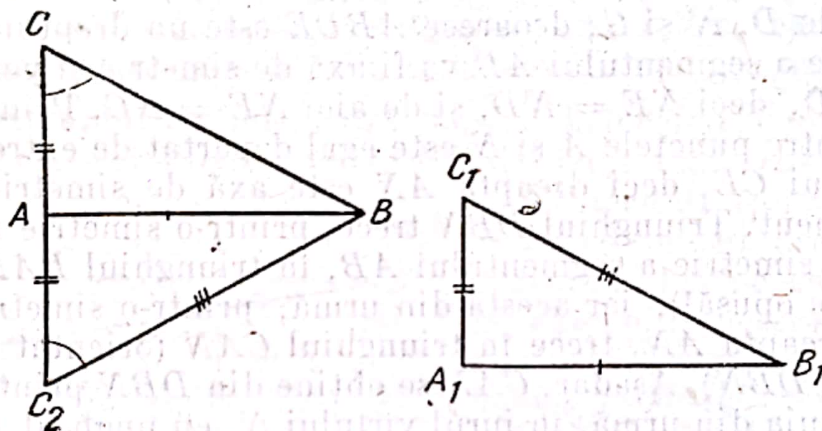


Fig. 20

$$BC = BC_2 = B_1C_1.$$

Adăugăm că aceasta poate avea loc numai în cazul triunghiurilor dreptunghice (în fig. 20 stînga, unghiurile în punctul A sînt adiacente și egale[1])

---

[1]) Să observăm că trebuie să prevedem această posibilitate (ca vîrfurile C, A, C_2 să se afle pe o aceeași dreaptă) și în demonstrația obișnuită a cazului de egalitate a triunghiurilor, cînd acestea au laturile respectiv egale. În această ipoteză, atît acolo cît și în cazul nostru, demonstrația se face cu succes observînd de asemenea că triunghiurile egale trebuie să fie dreptunghice.

O altă situaţia se obţine cînd sînt în prelungire laturile (BC şi BC_2, fig. 21) despre care nu ştim nimic din ipoteza teoremei. Desigur, se obţine triunghiul isoscel ACC_2, dar nu avem nici o

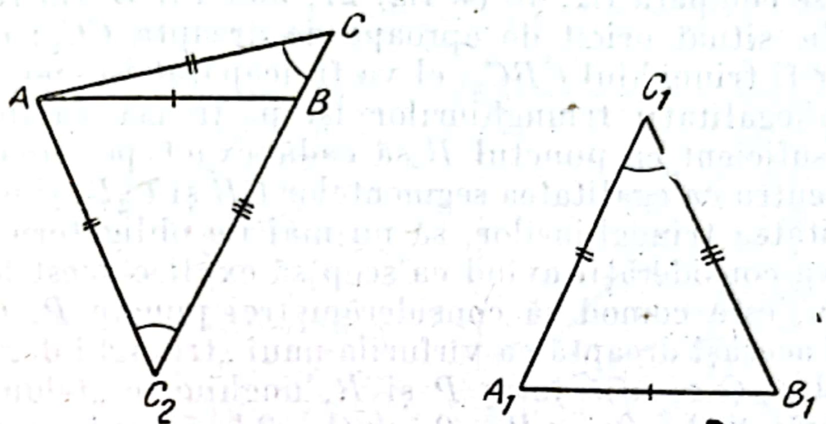


Fig. 21

posibilitate să tragem de aici vreo concluzie cu privire la laturile CB şi C_2B. Mai mult, cititorul îşi va reaminti imediat figura triunghiului isoscel (fig. 19), împărţit în două părţi inegale, şi va trage concluzia că, în acest caz, triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ nu sînt în general egale (în afară de cazul în care unghiurile la vîrfurile B şi B_1 sînt drepte; atunci avem din nou egalitate).

O b s e r v a ţ i a 1. Consideraţiile precedente ne sugerează cum s-ar putea „corecta" teorema noastră, adică cu ce teoreme înrudite, dar adevărate, ar putea fi înlocuită. Dăm două exemple de astfel de „corectări".

a) *Dacă între elementele a două triunghiuri s-a stabilit o corespondenţă, astfel încît două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele într-un triunghi sînt egale cu elementele respective ale celuilalt, atunci unghiurile opuse laturilor egale ale celei de a doua perechi (în toate figurile 10—12 şi 20—21 aceste unghiuri sînt notate prin literele B şi B_1) sînt sau egale între ele, şi atunci triunghiurile sînt egale* (fig. 10—12 şi 20), *sau suplimentare* (fig. 21).

b) *Dacă între elementele a două triunghiuri s-a stabilit o corespondenţă, astfel încît două laturi şi unghiul opus celei mai mari dintre ele într-un triunghi sînt egale cu elementele respective ale celuilalt, triunghiurile sînt egale.*

În adevăr, acum cazul reprezentat în fig. 21 este exclus: nici unul dintre unghiurile B şi B_1 nu poate fi obtuz (şi nici măcar drept), deoarece nu este opus celei mai mari laturi. Această teoremă se dă uneori în manualele de geometrie sub denumirea de „cazul al IV-lea de egalitate a triunghiurilor".

Observația 2. Următorul fapt pare curios la prima vedere: cazul egalității triunghiurilor poate fi făcut într-un anumit sens „oricît de apropiat“ de cazul inegalității lor. De exemplu, dacă se compară fig. 10 cu fig. 21, punctul B din fig. 10 ar putea să fie situat oricît de aproape de dreapta CC_2; oricît de „îngust“ ar fi triunghiul CBC_2, el va fi neapărat isoscel, deci demonstrația egalității triunghiurilor își păstrează valabilitatea. Dar este suficient ca punctul B să cadă exact pe dreapta CC_2 (fig. 21), pentru ca egalitatea segmentelor CB și C_2B, și o dată cu ea și egalitatea triunghiurilor, să nu mai fie obligatorie. Facem acum cîteva considerații avînd ca scop să explice acest fenomen.

Uneori, este comod să considerăm trei puncte P, Q, R situate pe o aceeași dreaptă ca vîrfurile unui „triunghi degenerat“; dacă în plus, Q se află între P și R, unghiurile „triunghiului“ se consideră $\sphericalangle P = 0$, $\sphericalangle R = 0$, $\sphericalangle Q = 2d$. Sensul acestei terminologii este clar: atîta timp cît punctele sînt situate „aproape“ pe aceeași dreaptă, ele determină totuși un triunghi cu două unghiuri „foarte mici“ și un al treilea „apropiat“ de $2d$. Prin deformarea continuă a figurii, aceste trei puncte pot ajunge exact pe aceeași dreaptă și, pentru acest caz, este de dorit să se păstreze denumirile precedente. În aceste condiții, unele teoreme sînt la fel de valabile pentru triunghiurile „veritabile“ ca și pentru cele „degenerate“; astfel este, spre exemplu, teorema: suma unghiurilor unui triunghi este egală cu $2d$. În schimb, alte teoreme își pierd valabilitatea, în cazul trecerii la triunghiuri degenerate. Printre acestea, se află în particular teorema: un triunghi cu două unghiuri egale este isoscel. Această teoremă este adevărată, dacă unghiurile egale sînt diferite de zero; dar în triunghiul degenerat PQR, despre care tocmai s-a vorbit, din egalitățile $\sphericalangle P = \sphericalangle R = 0$, nu rezultă nicidecum că $PQ = QR$, adică că punctul Q este mijlocul segmentului PR; el poate fi situat oriunde pe acest segment. Acest exemplu are o legătură directă cu problema care ne interesează. Atîta timp cît, în figura 10 sau 11, punctul B nu se află pe dreapta CC_2, oricît de mici ar fi unghiurile adiacente laturii CC_2 în triunghiul BCC_2, din egalitatea acestor unghiuri rezultă că $CB = C_2B$. Dar dacă, ca în fig. 21, triunghiul BCC_2 degenerează, amîndouă unghiurile considerate se anulează, triunghiul poate să nu mai fie isoscel și, o dată cu aceasta, concluzia teoremei își pierde valabilitatea.

La exemplul 9. Afirmația teoremei este falsă, deoarece se poate construi ușor un dreptunghi înscris într-un pătrat și avînd laturile neegale: este suficient să luăm laturile unui dreptunghi

paralele cu diagonalele pătratului (dar fără să împartă laturile pătratului în jumătate). Mai exact (fig. 22); pornind de la două vîrfuri opuse ale pătratului, de exemplu de la A și C, așternem de-a lungul laturilor lui patru segmente egale $AM = AQ = CM = CP$, de lungime arbitrară diferită de $\frac{a}{2}$, unde a este lungimea laturii pătratului; părțile rămase din laturile pătratului sînt de asemenea egale între ele: $MB = BN = PD = DQ \neq \frac{a}{2}$. Unind succesiv punctele M, N, P, Q, M, obținem patru triunghiuri dreptunghice isoscele, egale două cîte două: $\triangle AMQ \equiv \triangle CPN$, $\triangle BNM \equiv \triangle DQP$. De unde $QM = PN$, $MN = QP$, patrulaterul $MNPQ$ este un paralelogram și anume un dreptunghi, deoarece, de exemplu, $\sphericalangle MQP = 180° - 45° - 45° = 90°$ (în același timp, observăm că laturile patrulaterului $MNPQ$, făcînd cu laturile pătratului unghiuri de 45°, trebuie să fie paralele cu diagonalele acestuia; de unde se obține o nouă demonstrație a faptului că $MNPQ$ este un dreptunghi).

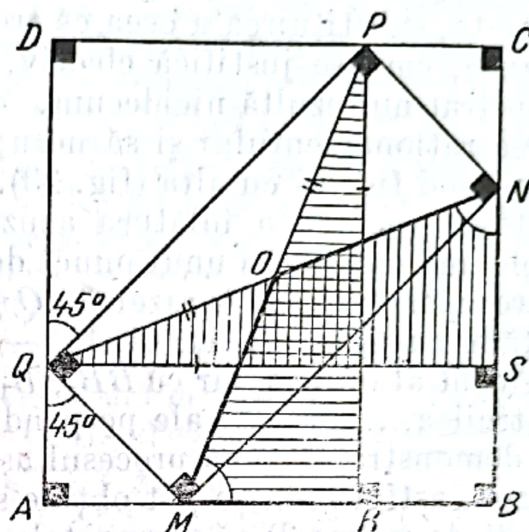


Fig. 22

Independent de construcția pe care am expus-o acum, se poate observa următorul defect logic în demonstrația de la p. 19: nemai dînd crezare figurii arbitrare 13, am considerat că dintre cele două proiecții — a punctului P pe AB și a punctului Q pe BC — una (R) se află pe o latură a patrulaterului $MBNO$, iar cealaltă (S) pe prelungirea unei laturi; cu alte cuvinte că, dintre cele două unghiuri egale $\sphericalangle OMR$ și $\sphericalangle ONS$, unul este interior, iar celălalt exterior patrulaterului $MBNO$. Această poziție a punctelor sau unghiurilor nu a fost fundată prin nici un fel de argumente și nici nu putea să fie: deoarece cu aceeași ipoteză a teoremei este compatibilă și fig. 22 unde unghiurile amintite sînt amîndouă interioare.

Trăgînd concluzia, putem formula teorema corectată, în mai multe variante, de exemplu:

1) *Dacă un dreptunghi este înscris într-un pătrat, astfel încît una dintre laturile celui dintîi nu este paralelă cu niciuna dintre diagonalele celui de al doilea, acest dreptunghi este un pătrat*; sau

2) *dacă un dreptunghi cu laturi neegale este înscris într-un pătrat, laturile sînt paralele cu diagonalele pătratului.*

La exemplul 10. Eroarea este de aceeaşi natură logică ca şi în exemplul 2: „neînţelegerea a ceea ce se demonstrează"; cu alte cuvinte, substituirea a ceea ce trebuie demonstrat, cu o altă propoziţie, care se justifică efectiv, dar din care propoziţia de demonstrat nu rezultă nicidecum. Să analizăm încă o dată desfăşurarea raţionamentului şi să ne uşurăm munca de găsire a erorii, înlocuind fig. 14 cu alta (fig. 23), unde razele AQ şi BP se intersectează (pentru a înlătura acuzaţia că figura rezolvă dinainte problema existenţei unui punct de intersecţie, au fost făcute mici întreruperi la trasarea razelor AQ şi BP). Dacă, pentru prescurtare, notăm cu AA_1, A_1A_2, A_2A_3, — primul, al doilea, al treilea,... segment al oblicei, iar cu BB_1, B_1B_2, B_2B_3,...—primul, al doilea, al treilea,... segment ale perpendicularei, trebuie să recunoaştem ca demonstrate: 1) că procesul aşternerii acestor segmente nu are sfîrşit, astfel încît se pot obţine segmente cu un număr de ordine oricît de mare; 2) că segmentele *cu acelaşi număr de ordine* nu se intersectează, adică nu au puncte comune nici primul segment al perpendicularei cu primul segment al oblicei, nici al doilea cu al doilea..., nici al sutelea cu al sutelea etc. De ce, însă, nu s-ar putea intersecta segmentele cu *numere de ordine diferite*, să zicem, segmentul al 20-lea al perpendicularei cu segmentul al 25-lea al oblicei? Dar atunci cînd afirmăm că perpendiculara şi oblica nu se taie nicăieri, noi trebuie să arătăm că *nici unul* dintre segmentele perpendicularei nu are puncte comune cu *nici unul* dintre segmentele oblicei. Şi nu putem să ne mulţumim, în locul acestei demonstraţii, cu faptul că nici unul dintre segmentele perpendicularei nu intersectează segmentul de oblică *cu acelaşi număr de ordine.* Dacă privim fig. 23 (în care s-au păstrat notaţiile din fig. 14; ambele figuri au fost efectuate fără deformări

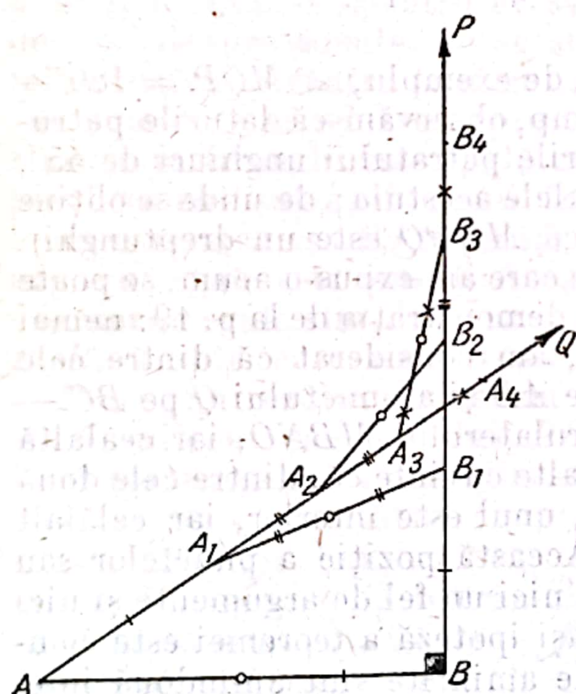


Fig. 23

intenţionate), ne convingem, desigur, „din ochi“ că aici al doilea segment al perpendicularei se intersectează cu al patrulea segment al oblicei[1]). Acest sofism este remarcabil prin contrastul între caracterul elementar al erorii şi dificultatea de a o găsi.

O b s e r v a ţ i e . Aşa cum s-a mai spus (vezi nota de la p. 19), aici am împrumutat numai ideea unui sofism, reprodus de Proclus. Acesta consideră două drepte oarecare (de fapt două raze care nu sînt în prelungire şi au origini diferite) şi demonstrează, cu ajutorul procesului infinit de aşternere a segmentelor descris mai sus, că aceste drepte nu se intersectează. Proclus caracterizează just eroarea logică comisă în acest raţionament sofistic, atunci cînd spune că nu se demonstrează decît imposibilitatea de a obţine punctul de intersecţie cu ajutorul acestei construcţii, ceea ce nu înseamnă nici decum că acest punct nu există. Dar, judecînd după expunerea lui Bonola, nu putem fi convinşi de faptul că Proclus a pătruns mai adînc esenţa geometrică a erorii comise; în orice caz, autorul italian, apropiat de noi în timp, greşeşte în mod evident atunci cînd spune că inaccesibilitatea punctului de intersecţie în acest caz are acelaşi caracter ca în celebrul sofism „Ahile şi broasca ţestoasă“. Această apropiere făcută de Bonola vrea, desigur, să spună următoarele: punctul de intersecţie al razelor AQ şi BP (să-l numim K) este inaccesibil în construcţia dată, tocmai pentru faptul că, atunci cînd n creşte nemărginit, punctele A_n şi B_n tind către punctul K, drept limită, fără să-l atingă vreodată. În varianta noastră, această presupunere este imposibilă, deoarece din egalitatea $AA_n = BB_n$, adevărată pentru orice n, ar rezulta că $AK = BK$, adică ipotenuza ar fi egală cu o catetă. Dar această imposibilitate se păstrează şi în construcţia lui Proclus — Bonola, cu excepţia cazului particular în care triunghiul AKB este isoscel. Aşadar şi aici are loc în general intersecţia unor segmente cu numere de ordine diferite şi nu tinderea extremităţilor segmentelor cu acelaşi număr de ordine către o limită comună.

Concluzii. Cititorul se poate întreba: dacă erorile din raţionamentele matematice sînt uneori atît de bine ascunse, încît nu pot fi descoperite decît după o analiză minuţioasă, mai este matematica un fundament atît de solid pentru ştiinţele exacte (fizica, tehnica etc.) cît ne-am obişnuit să o considerăm?

Desigur, nici o metodă ştiinţifică nu ne garantează că nu vom ajunge la concluzii greşite; mai este necesar să folosim această metodă în mod corect. Aceasta înseamnă numai că trebuie să studiem izvoarele posibile ale erorilor, să fim mai exigenţi în ce priveşte argumentarea afirmaţiilor noastre. Iar pentru a deveni limpede cît este de real pericolul de a comite o eroare care să poată rămîne neobservată, trebuie să facem apel la istoria ştiinţei noastre.

Istoria cunoaşte erori izolate în lucrările matematicienilor, dar ele nu au oprit niciodată progresul ştiinţei şi au fost desco-

---

1) Cunoscînd unghiul A, am putea să găsim, cu ajutorul trigonometriei, numerele de ordine ale segmentelor care se intersectează.

perite pe o treaptă mai înaltă. Un exemplu convingător este istoria multiseculară a încercărilor de a demonstra axioma paralelelor despre care am mai amintit. Despre această axiomă, Lobacevski scria în 1823: „O demonstrație riguroasă a acestui adevăr nu s-a putut găsi pînă în prezent. Acelea care au fost date se pot numi numai explicații, dar nu merită să fie considerate ca demonstrații matematice în înțelesul deplin al cuvîntului". Lobacevski a ajuns la această concluzie cu cîțiva ani înainte de remarcabila sa descoperire. În istoria geometriei, ea a și constituit acea treaptă nouă de la înălțimea căreia — la început pentru Lobacevski, iar apoi pentru întreaga lume matematică — a devenit evidentă inconsistența celor mai ingenioase proiecte de demonstrație a axiomei paralelelor.

Cititorii vor găsi alte ilustrații pentru aceste concluzii în capitolele III și IV.

CAPITOLUL III

ERORI DE RAȚIONAMENT, LEGATE DE NOȚIUNEA DE LIMITĂ

Exemplele din acest capitol sînt accesibile numai elevilor din ultimele două clase: aici, vom avea nevoie de cunoașterea lungimii cercului, a noțiunii de limită, a trigonometriei și, în unele cazuri, a geometriei în spațiu.

Exemplul 11. *Toate cercurile au aceeași lungime.*

Acest sofism antic este atribuit filozofului grec Aristotel, (sec. IV î.e.n.) și numit „roata lui Aristotel", din motive care vor fi lămurite imediat.

Amintim o problemă de aritmetică, unde printre date se găsea lungimea circumferinței (acolo se spunea de obicei pur și simplu „circumferința") roții unei trăsuri sau a unui automobil care se mișcă pe șosea și se cerea să se găsească drumul parcurs, sau reciproc. Ca bază a soluției se lua faptul, în aparență evident, că la fiecare rotație completă a roții în mișcare, ea parcurge un drum egal cu circumferința roții; dacă, de exemplu, roata are „o circumferință" de 2 m și face 30 rotații complete, distanța parcursă este egală cu 60 m. Trebuie să spunem că, dacă mișcarea se face în linie dreaptă, sau dacă nu se cere o precizie deosebită, aceste calcule sînt confirmate de experiență. Circumferința roții

se poate măsura cu ajutorul unei panglici; se poate vedea că roata a făcut o rotaţie completă urmărind o spiţă oarecare, marcată, a acestei roţi sau, în loc de aceasta, punînd o eclisă care lasă o urmă pe pămînt la marginea roţii (mulţi contori instalaţi la diferite maşini de transport înregistrează tocmai numărul de rotaţii şi indică distanţa, sau — în combinaţie cu un mecanism de ceasornic — viteza). Desigur, toate aceste calcule sînt corecte

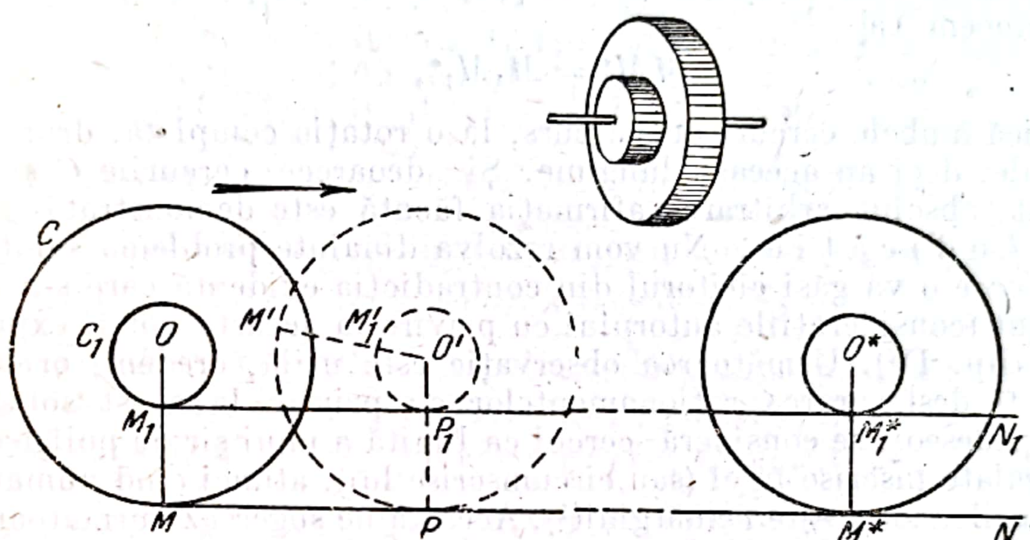


Fig. 24

din punct de vedere practic, dacă roata se învîrteşte „normal", adică nici nu „saltă" şi nici nu „patinează"; în limbajul mecanicii, aceasta se exprimă prin cuvintele „roata se rostogoleşte fără alunecare".

Să revenim acum la sofism. Să considerăm două cercuri concentrice C şi C_1 de raze diferite, solidar legate între ele (fig. 24). În acelaşi timp, să ne imaginăm un model fizic: două roţi cilindrice aşezate pe o axă orizontală, de exemplu, şi legate solidar între ele (sau chiar astfel: o parte a arborelui cilindric este strunjită sub forma unei noi roţi cilindrice, cu aceeaşi axă, dar cu o rază mai mică, desenul din fig. 24). La cercurile C şi C_1 se duc tangentele MN şi M_1N_1, în punctele M şi M_1, situate pe aceeaşi rază OM. Deoarece cercurile sînt legate solidar, ele se mişcă ca un întreg: cu unghiul cu care se roteşte un cerc, se roteşte şi celălalt. De aceea, dacă cercul C se mişcă pe dreapta MN, cercul C_1 se mişcă pe dreapta M_1N_1 (în fig. 24, se indică printr-o săgeată sensul mişcării cercurilor solidare; printr-o linie întreruptă este reprezentată una dintre poziţiile intermediare, M' şi M_1' sînt noile poziţii ale punctelor M şi M_1). Pentru modelul fizic, tre-

buie să ne imaginăm că, sub fiecare roată cilindrică, s-a așezat o șină orizontală și atunci cînd roata mare se învîrtește pe șina ei, ea face ca roata mică să se învîrtească și ea pe cealaltă șină. Să presupunem că cercul C, rotindu-se pe dreapta MN, efectuează o rotație completă, în urma căreia punctul M ocupă poziția M^*; în acest caz, cercul C_1 descrie de asemenea o rotație completă, iar punctul M_1 ocupă poziția M^*_1 pe raza O^*M^*, paralelă cu OM (deoarece amîndouă razele sînt perpendiculare pe MN). De aici, deducem că

$$MM^* = M_1M_1^*,$$

adică ambele cercuri au parcurs, la o rotație completă, drumuri egale, deci au aceeași lungime. Și, deoarece cercurile C și C_1 sînt absolut arbitrare, afirmația făcută este demonstrată.

Indicație. Nu vom rezolva dinainte problema soluției pe care o va găsi cititorul din contradicția evidentă care s-a obținut (considerațiile autorului cu privire la aceasta vor fi expuse în cap. IV). Următoarea observație este utilă, credem, oricare ar fi desfășurarea raționamentelor cu privire la acest sofism.

Adeseori se consideră cercul ca limită a unui șir de poligoane regulate înscrise în el (sau circumscrise lui), atunci cînd numărul laturilor lor crește nemărginit[1]). Aceasta ne sugerează următoarea ideie: pentru a ne clarifica procesul de rostogolire a cercului, să rostogolim în locul lui un poligon regulat; cu cît numărul lui de laturi va fi mai mare, cu atît ne vom putea reprezenta mai exact imaginea rostogolirii cercului.

Este evident ce înseamnă „un poligon (convex) se rostogolește (fără alunecare) pe o dreaptă“: să stabilim o anumită ordine de parcurgere a vîrfurilor (și deci a laturilor) poligonului, de exemplu, în sens contrar mersului acelor unui ceasornic, și să presupunem că, în poziția inițială, una dintre laturi este așezată pe dreaptă;

---

[1]) Aici se folosește în mod intenționat termenul de „limită“ (în locul termenului răspîndit „poziție limită“), căruia i se dă un sens absolut exact: oricît de îngust ar fi un inel mărginit de două cercuri concentrice cu un cerc dat și avînd unul raza mai mare, celălalt raza mai mică decît a cercului dat (de exemplu inelul poate fi cuprins între cercurile de raze $R - \varepsilon$ și $R + \varepsilon$, unde R este raza cercului dat), se găsește un număr n, astfel încît toate poligoanele regulate înscrise (circumscrise), cu un număr de laturi mai mare decît n sau egal cu n, vor fi cuprinse în întregime în inelul considerat, închizînd marginea lui interioară și fiind închise de marginea exterioară. Aceasta nu trebuie confundată cu propoziția (mai des, definiția) foarte cunoscută: „Lungimea cercului este limita șirului perimetrelor poligoanelor regulate înscrise (circumscrise), atunci cînd...“; cum vom vedea (v. mai jos, exemplele 12—14), termenul „limită“ nu are același sens în amîndouă exemplele.

rotim poligonul în jurul vîrfului comun acestei laturi și celei următoare, pînă cînd pe dreaptă se așterne latura următoare; apoi rotim în jurul vîrfului următor etc. Pe scurt, poligonul „se mută" de pe o latură pe alta, rotindu-se de fiecare dată în jurul vîrfului comun acestor laturi, rezultatul fiind deplasarea de-a lungul dreptei, într-un sens dat.

În cazul unui poligon regulat cu n laturi (fig. 25, unde $n = 8$) să-i numerotăm vîrfurile: $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, A_n și să presupunem că, în poziția inițială, latura A_1A_2 se află pe dreapta pe care se va rostogoli poligonul în sensul A_1A_2 (indicat cu o săgeată în fig. 25). În radiani, unghiul exterior al poligonului, ca și unghiul lui central, este egal cu $\frac{2\pi}{n}$ (în alte unități $\frac{4d}{n}$ sau $\frac{360°}{n}$); de aceea, este suficient să rotim poligonul în jurul vîrfului A_2 cu unghiul $\frac{2\pi}{n}$, pentru ca latura A_2A_3 să se aștearnă peste dreaptă. După această rotație, centrul O al poligonului ocupă poziția O', iar vîrfurile $A_1A_2, A_3, \ldots, A_n$, respectiv pozițiile A_1', A_2' (coincizînd cu A_2), $A_3', \ldots, A_n'$. O nouă rotație în jurul vîrfului A_3', cu un unghi $\frac{2\pi}{n}$, va aduce poligonul $A_1'\ A_2'\ A_3' \ldots A_n'$ în poziția $A_1''\ A_2''\ A_3'' \ldots A_n''$ (în fig. 25, sînt notate numai vîrfurile: A_3'', coincizînd cu A_3', și A_4'' situat pe dreaptă). Continuînd acest proces, după rotația a $(n-1)$-a vom aduce poligonul în poziția $A_1^{(n-1)}\ A_2^{(n-1)} \ldots A_n^{(n-1)}$, în care centrul se va găsi în punctul $O^{(n-1)}$, iar latura $A_n^{(n-1)}\ A_1^{(n-1)}$ va fi așternută peste dreaptă. Deoarece, în acest caz, vîrful A_1 se reîntoarce pe dreaptă, nu este necesar să continuăm mișcarea; se înțelege ușor că segmentul $A_1A_1^{(n-1)}$ este egal cu perimetrul poligonului.

Cititorul a observat că poziția fiecărui vîrf este dată prin doi indici: cel de jos arătînd numărul pe care-l avea acest vîrf în poziția inițială, iar cel de sus (la început accente, iar apoi numărul lor închis în paranteze) permițînd să ne dăm seama de numărul rotațiilor efectuate; de exemplu, prin simbolul $A_6^{(4)}$ se notează poziția vîrfului A_6, după rotația a patra. În fig. 25, se pot observa, o dată cu proprietățile esențiale ale mișcării descrise, și unele întîmplătoare, în legătură cu valoarea aleasă pentru n; recomandăm cititorului să execute figura pentru un alt caz, cînd numărul laturilor este impar, de exemplu pentru $n = 5$.

Revenind la sofismul de care ne ocupăm, să luăm acum în locul a două cercuri concentrice, două poligoane regulate cu n

laturi, concentrice şi cu laturile respectiv paralele; cu alte cuvinte, două poligoane regulate care se obţin unul din celălalt printr-o asemănare (omotetie) cu centrul de asemănare în centrul celui de al doilea poligon. Considerînd poligoanele solidar legate între

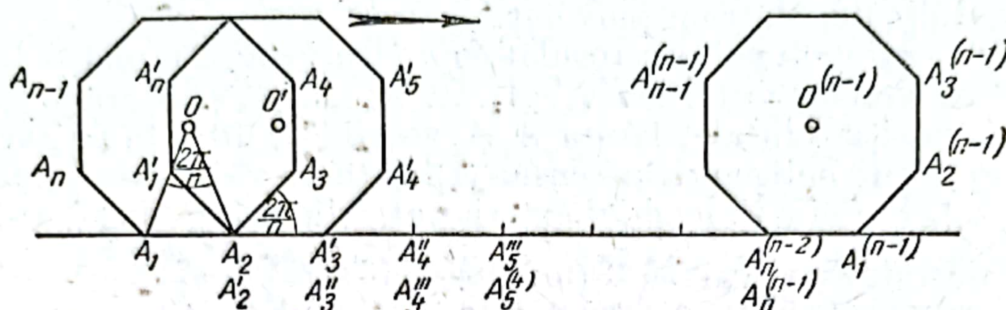


Fig. 25

ele, vom face pe cel mai mare să se rostogolească pe dreaptă aşa cum s-a descris mai sus şi vom căuta să ne lămurim cum se va mişca, în acest caz, poligonul mai mic. Acesta din urmă se va

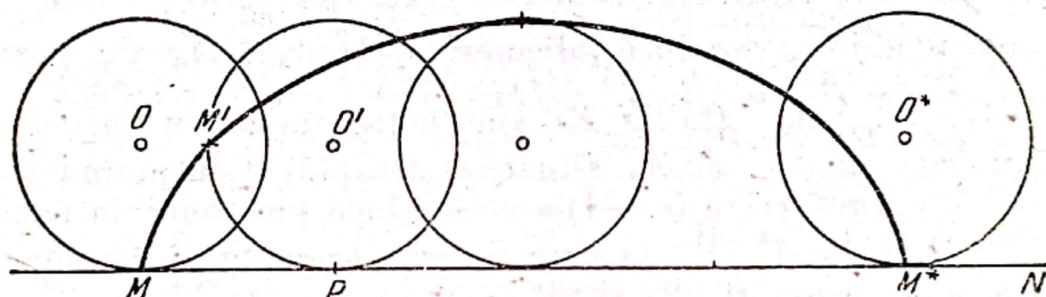


Fig. 26

„muta" de asemenea de pe o latură pe alta? Perimetrul poligonului mai mic se va „desfăşura" pe dreaptă, aşa cum se întîmplă cu cel mare? Se poate proceda şi invers: să facem ca poligonul mai mic să se rostogolească şi să urmărim, în acest caz, mişcarea celui mai mare.

P r o b l e m ă . Vom formula acum o problemă în care se foloseşte, într-un alt scop, înlocuirea unui cerc care se rostogoleşte printr-un poligon. Această problemă are comun cu tematica capitolului de faţă faptul că ea conţine unele treceri la limită, care trebuie justificate (v. exemplele următoare).

Se ştie că, atunci cînd un cerc se rostogoleşte pe o dreaptă, fiecare punct al cercului se mişcă pe o curbă numită *cicloidă*. Dacă cercetăm mişcarea punctului care, în poziţia iniţială a cercului care se rostogoleşte, se găseşte „jos", adică coincide cu punctul de tangenţă (fig. 26 compară cu fig. 24), atunci traiectoria acestui punct între două poziţii succesive M şi M^*

(ultima, ca şi în fig. 24, corespunde unei rotaţii complete a cercului care se rostogoleşte) se reprezintă sub forma „buclei de cicloidă" $MM'M^*$. Cu mijloacele matematicilor superioare, se poate stabili că lungimea acestei bucle este exact de 8 ori mai mare decît raza cercului care se rostogoleşte, iar aria cuprinsă între buclă şi dreapta MM^* este egală cu întreitul ariei cercului. Problema constă în a obţine aceste rezultate pe cale elementară. Pentru aceasta, se propune înlocuirea cercului de rază R care se rostogoleşte, printr-un poligon regulat cu n laturi, înscris în el.

Cu notaţiile din fig. 25, traiectoria punctului A_1 se va compune din arce de cerc (în număr de $n-1$; în fig. 25, aceste arce nu sînt reprezentate): $\overset{\frown}{A_1A_1'}$ cu centrul A_2, $\overset{\frown}{A_1' A_1''}$ cu centrul A_3', ..., $\overset{\frown}{A_1^{(n-2)} A_1^{(n-1)}}$ cu centrul $A_n^{(n-2)}$. În ansamblul lor, aceste arce de cerc formează o curbă care merge de la A_1 pînă la $A_1^{(n-1)}$, asemănătoare cu cicloida, dar diferind de ea prin existenţa unor „puncte de frîngere" (în locul în care se unesc arcele consecutive). Pe măsură ce n creşte, unghiurile formate devin tot mai obtuze, iar curba compusă din arcele de cerc se apropie de o buclă de cicloidă. Ne putem aştepta că aceasta din urmă să fie limita celei dintîi, pentru $n \to \infty$. Dar, cu ajutorul trigonometriei elementare, se poate găsi cu uşurinţă, pentru orice n, ungimea traiectoriei descrise la o rotaţie completă de un vîrf al poligonului, aceasta fiind formată din arce de cerc, precum şi aria cuprinsă între această traiectorie şi dreapta $A_1A_1^{(n-1)}$. Dacă, în expresiile obţinute pentru lungime şi arie, trecem la limită pentru $n \to \infty$, obţinem respectiv $8R$ şi $3\pi R^2$, adică rezultatele corecte[1]). Dar aceste raţionamente vor putea fi considerate ca o *stabilire* a formulelor pentru lungimea şi aria cicloidei, în adevăratul înţeles al cuvîntului, numai după ce se va *justifica trecerea la limită*, adică se va demonstra că pentru $n \to \infty$, lungimea şi aria obţinute pentru poligonul cu n laturi care se rostogoleşte au ca

---

[1]) În varianta soluţiei, pe care a dat-o autorul, în afară de formulele cunoscute din trigonometria învăţată în şcoală, mai intervin următoarele:

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin k\alpha = \frac{\sin k\frac{\alpha}{2}\sin(k+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 k\alpha = \frac{2k+1}{4} - \frac{\sin(2k+1)\alpha}{4\sin\alpha}$$

$$2\,[\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\sin 3\alpha + \ldots + \sin(k-1)\alpha\sin k\alpha] =$$
$$= k\cos\alpha - \frac{\sin 2k\alpha}{2\sin\alpha}$$

(cititorul poate verifica uşor aceste identităţi, folosind de exemplu inducţia completă);

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\sin\omega}{\omega} = 1 \quad (\omega \text{ este măsurat în radiani})$$

(această formulă se poate găsi în multe manuale de trigonometrie).

limită respectiv lungimea şi aria căutată. Probabil că rezultatul se poate obţine rămînînd în cadrul matematicii elementare, dar este, fără îndoială, foarte greu.

Problema admite o generalizare: în cazul unui cerc care se rostogoleşte, se consideră şi traiectoriile punctelor situate în interiorul s u în exteriorul cercului şi solidar legate cu el; se ajunge la aşa numitele cicloide „alungite“ şi „scurtate“. Putem încerca să studiem şi aceste curbe, înlocuind cercul care se rostogoleşte printr-un poligon regulat înscris în el şi trecînd apoi la limită.

Exemplul 12. *Lungimea ipotenuzei este egală cu suma lungimilor catetelor.*

În triunghiul dreptunghic ABC (fig. 27; $C = 90°$), coborîm din mijlocul D al ipotenuzei perpendicularele DE şi DF pe catete; se obţine o linie frîntă $BEDFA$, formată din patru segmente, a cărei lungime este, evident, egală cu suma lungimilor catetelor. Repetăm aceeaşi construcţie pentru fiecare dintre triunghiurile DBE şi ADF: din mijloacele ipotenuzelor DB şi AD, coborîm perpendiculare pe catete; obţinem o linie frîntă formată din opt segmente, cu lungimea precedentă. Procesul se poate continua la infinit: ipotenuza va fi împărţită succesiv în 2, 4, 8, 16,... părţi egale; se va forma un şir de linii frînte, în formă de ferăstrău — pentru prescurtare le vom numi pur şi simplu „ferăstraie“ — unind punctul A cu B şi constînd respectiv din 2, 4, 8, 16,... „dinţi“ (adică 4, 8, 16, 32,... segmente). Toate „ferăstraiele“ au aceeaşi lungime (adică aceeaşi sumă a segmentelor care le compun), egală cu suma lungimilor catetelor. O dată cu creşterea numărului de segmente, „ferăstrăul“ se apropie tot mai mult de ipotenuza AB, aşa încît, pentru valori foarte mari ale acestui număr, va fi greu să deosebim, practic vorbind, linia frîntă cu segmente foarte mici de segmentul de dreaptă (la fel cum este greu să deosebim de cerc poligonul cu un număr foarte mare de laturi înscris în el).

Această reprezentare intuitivă o vom pune la baza enunţului precis: şirul de „ferăstraie“ are ca limită segmentul AB, în sensul că cea mai mare dintre distanţele de la punctele „ferăstrăului“ la dreaptă tinde către zero, o dată cu creşterea numărului de ordine al „ferăstrăului“ (în adevăr, această distanţă maximă nu este decît înălţimea corespunzătoare ipotenuzei a unuia, indiferent care, dintre triunghiurile dreptunghice egale, care formează „dinţii ferăstrăului“, iar înălţimea unui „dinte“ este mai mică decît ipotenuza lui, care tinde către zero). Cu alte cuvinte, dacă fixăm o bandă (oricît de îngustă), cuprinsă între ipotenuza B şi o paralelă la ea care taie catetele (fig. 27), în şirul „ferăstraielor“ se găseşte unul care este situat în întregime, împreună

cu toate cele următoare, în interiorul acestei bande (v. nota de la p. 41). Dar toate „ferăstraiele" au aceeași lungime, deci, șirul lungimilor lor este format din numere egale și are ca limită același număr, egal cu suma lungimilor catetelor. Pe de altă parte, limita „ferăstrăului" este ipotenuza, a cărei lungime trebuie, de asemenea, să fie limita șirului lungimilor „ferăstraielor", dar un șir nu poate avea două limite diferite; cu aceasta, afirmația noastră este demonstrată.

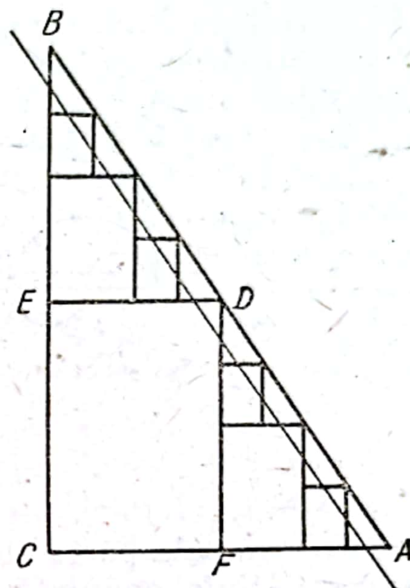


Fig. 27

Observația 1. Nu este esențial că am luat un triunghi dreptunghic *ABC* (singurul lui avantaj constă în faptul că laturile lui au denumiri consacrate). În cazul unui triunghi ascuțitunghi, s-ar putea construi șirul „ferăstraielor" ducînd, prin punctele de diviziune ale unei laturi, paralele la celelalte două laturi. De asemenea, nu este esențial că am împărțit latura în 2, 4, 8,... părți egale; am fi putut s-o împărțim în 2, 3, 4, 5,... și chiar în părți inegale, cu singura condiție ca numărul lor să crească nemărginit, iar diviziunea maximă să tindă către zero.

Observația 2. Cititorul va încerca, poate, să caute originea erorii în faptul că lungimea „ferăstrăului" rămîne neschimbată, deci nu s-ar putea vorbi despre limita ei. La aceasta, facem obiecția că matematica ia în considerare și șiruri care constă din numere egale; acest număr va fi chiar limita șirului, conform sensului exact al noțiunii de „limită". De altfel, am fi putut cu ușurință să modificăm construcția făcută, astfel încît lungimea „ferăstrăului" să devină variabilă, dar tot restul să-și păstreze valabilitatea. Ar fi fost suficient, de exemplu, să rupem din fiecare „ferăstrău" unul dintre dinți, să zicem primul, începînd de la punctul *A*; mai exact, să înlocuim primele două segmente prin segmentul de ipotenuză începînd în *A* (în urma cărui fapt, numărul segmentelor fiecărui „ferăstrău" se micșorează cu o unitate).

Ca și înainte, „ferăstrăul știrbit" va avea ca limită segmentul *AB*, iar lungimea lui, diferind de suma lungimilor catetelor $AC + BC$ cu un „infinit mic", va tinde către aceeași sumă ca limită.

Exemplul 13. *Numărul π este egal cu 2.*

Să construim un semicerc pe segmentul AB ca diametru (fig. 28); să împărţim apoi în jumătate segmentul AB şi să construim pe fiecare jumătate ca diametru cîte un semicerc, aşezîn-

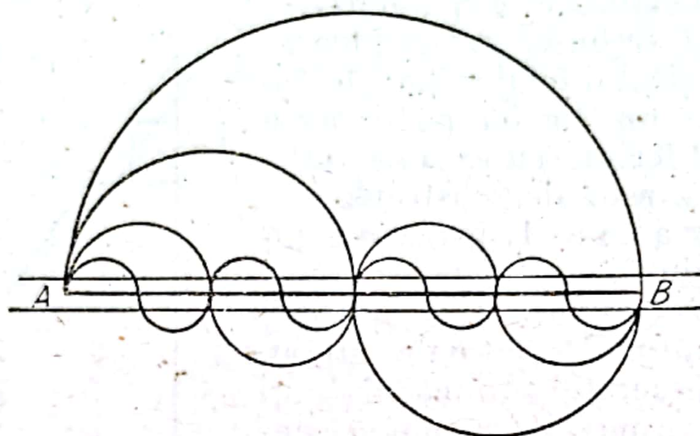


Fig. 28

du-le de ambele părţi ale lui AB. Aceste două semicercuri formează o linie ondulată (amintind prin aspectul ei exterior o sinusoidă), a cărei lungime de la A la B este egală cu lungimea semicercului iniţial, adică $\frac{\pi}{2}AB$; în adevăr, fiecare dintre semicercurile mai mici este de două ori mai scurt decît cel mare, ca avînd un diametru de două ori mai mic. Să împărţim acum segmentul AB în patru părţi egale şi să construim linia ondulată, constînd din patru semicercuri (fig. 28), cu aceeaşi sumă a lungimilor $\frac{\pi}{2}AB$. Vom prelungi acest proces nemărginit, împărţind segmentul AB în 8, 16,... părţi egale şi construind pe ele semicercuri situate alternativ de o parte şi de cealaltă a dreptei AB. Se obţine un şir de linii ondulate, care se apropie din ce în ce mai mult de segmentul AB şi care au ca limită acest segment, în sensul că distanţa maximă a punctelor fiecărei linii ondulate la dreapta AB (această distanţă maximă este egală, evident, cu raza semicercurilor care formează linia) tinde către zero, pe măsură ce ne îndepărtăm de originea şirului (în fig. 28, se reprezintă o bandă cuprinsă între două paralele la AB; oricît de îngustă ar fi această bandă, există un moment, în şirul nostru, începînd de la care toate liniile ondulate sînt cuprinse, pe toată lungimea lor de la A pînă la B, în interiorul bandei). Dar lungimea tuturor liniilor ondulate este aceeaşi, anume $\frac{\pi}{2}AB$;

aceeași trebuie să fie lungimea limitei acestor linii, adică a segmentului AB. Din egalitatea $\frac{\pi}{2} AB = AB$, obținem $\pi = 2$.

O b s e r v a ț i e . Acest exemplu se poate completa prin considerații analoge observațiilor 1 și 2 de la exemplul 12: nu joacă un rol esențial nici modul de împărțire a segmentului AB, nici faptul că lungimea liniei ondulate rămîne constantă. Ca și în exemplul precedent, s-ar putea înlocui de fiecare dată unul dintre semicercurile care formează linia ondulată prin diametrul lui și atunci lungimea acestei linii ar deveni variabilă. Propunem cititorului să studieze alte variante: în locul semicercurilor, adică al segmentelor capabile de un unghi drept, să construiască segmente capabile de un alt unghi oarecare (constant sau variind după o lege anumită, în funcție de numărul de diviziuni, fără însă să tindă către 180°); atunci pentru numărul π se vor obține alte valori.

Exemplul 14. *„Cilindrul lui Schwarz"*.

Cînd se urmărește să se măsoare un arc de curbă AB (fig. 29 stînga), se procedează aproape la fel ca în cazul măsurării cercului sau a părților lui: se înscriu în acest arc linii frînte (în acest caz, nu neapărat regulate, pentru că într-un arc oarecare aceasta se poate face numai în mod întîmplător) și se construiește un șir infinit de astfel de linii frînte, apropiindu-se nemărginit vîrfurile, adică avînd grijă ca lungimea celui mai mare segment al liniei frînte să tindă către zero pe măsură ce ne îndepărtăm de originea șirului. Șirul lungimilor acestor linii frînte va avea ca limită tocmai lungimea arcului măsurat.

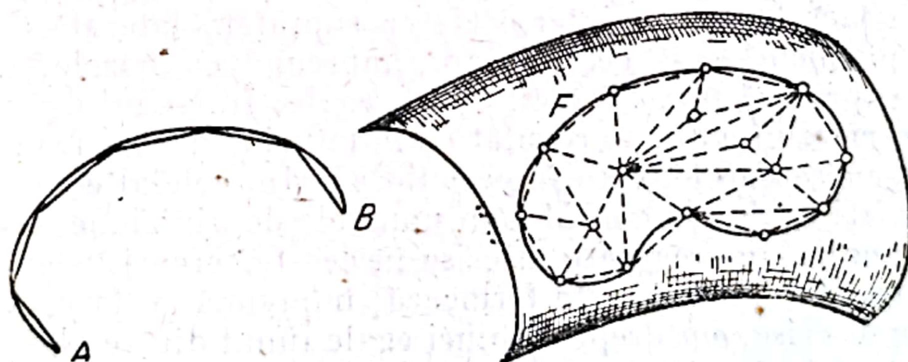


Fig. 29

Trecînd la un număr de dimensiuni cu o unitate mai mare, ajungem la o problemă înrudită: să se găsească măsura (aria) unei figuri F, situată pe o suprafață curbă (fig. 29, dreapta).

Făcînd analogia cu arcul, pare natural să procedăm astfel: să înscriem în figura dată suprafețe poliedrice[1]) cu fețele tot mai mici; aria figurii F va fi limita ariei suprafeței poliedrice variabile (adică a sumei ariilor fețelor ei). Aceasta necesită, desigur, o precizare: în interiorul figurii F și pe frontiera ei, vom lua o mulțime de puncte și le vom uni cîte trei prin plane, astfel încît să se formeze o suprafață poliedrică cu fețe triunghiulare și astfel ca două dintre ele să nu aibă puncte interioare comune, iar trei dintre ele, o muchie comună. Să construim un șir infinit de suprafețe poliedrice $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, înscrise în figura F, astfel încît lungimea celei mai mari muchii (adică cea mai mare din toate laturile tuturor fețelor triunghiulare) a suprafeței F_n să tindă către zero, pentru $n \to \infty$, și ca fiecare punct al figurii F să fie limita unui anumit șir de puncte luate respectiv pe $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ (putem face astfel încît frontiera suprafeței poliedrice să fie întotdeauna înscrisă în frontiera figurii F, v. fig. 29). Pare aproape evident că șirul ariilor suprafețelor poliedrice $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, are o limită, anume aria figurii F. Aici intră în joc, ca și în exemplele precedente aceleași reprezentări de „imposibilitate practică de a distinge“ o suprafață curbă de cea poliedrică înscrisă în ea, atunci cînd fețele acesteia din urmă sînt foarte mici. Dar, la sfîrșitul secolului trecut, matematicianul german G.A. Schwarz a arătat, cu ajutorul unui exemplu simplu, că aici evidența ne înșeală; trecem la expunerea acestui exemplu.

Să considerăm un cilindru circular drept de rază R și înălțime H (fig. 30); vom căuta aria suprafeței lui laterale, prin metoda expusă mai sus. În acest scop, vom împărți înălțimea în n părți egale și vom duce prin punctele de intersecție plane perpendiculare pe generatoare; la intersecția cu suprafața laterală a cilindrului, obținem $n-1$ cercuri care, împreună cu bazele, împart această suprafață în n zone cilindrice egale. Într-unul dintre cercuri, înscriem un poligon regulat cu m laturi și ducem prin vîrfurile lui generatoarele, care împart fiecare din celelalte cercuri în cîte m părți egale; să considerăm punctele de diviziune ca vîrfuri ale unor poligoane regulate înscrise în aceste cercuri. Segmentele generatoarelor astfel trasate formează, împreună cu laturile poligoanelor înscrise, mn dreptunghiuri egale (unul dintre ele $MNPQ$ este desenat în fig. 30), cu vîrfurile pe suprafața cilindrului. Rămîne să mai împărțim fiecare dreptunghi în două triunghiuri, printr-o diagonală, pentru a obține o suprafață poliedrică în-

---

[1]) O suprafață poliedrică se consideră înscrisă într-o suprafață curbă, dacă toate vîrfurile celei dintîi se află pe cea de-a doua.

scrisă în suprafaţa laterală a cilindrului şi formată din 2 mn feţe triunghiulare (egale). Cînd numerele m şi n cresc nemărginit, laturile acestor feţe triunghiulare tind către zero, ca şi distanţele tuturor punctelor lor la suprafaţa laterală a cilindrului)[1].

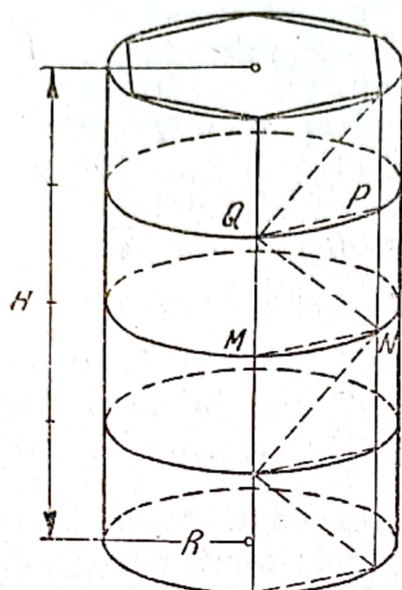


Fig. 30

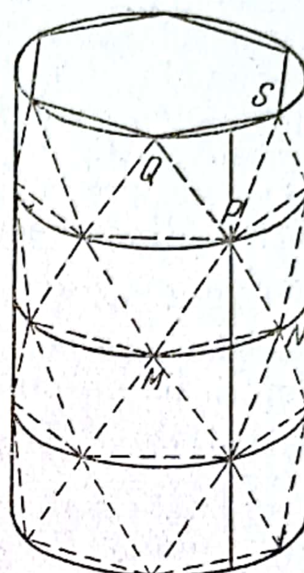


Fig. 31

Fiecare dintre poliedrele înscrise amintite este determinat prin valorile celor doi indici n şi m, dar şirul de poliedre se poate separa într-o infinitate de moduri, făcînd unul dintre indici funcţie de celălalt (bineînţeles, astfel încît amîndoi indicii să ia valori naturale, tinzînd în acelaşi timp către infinit), spre exemplu punînd $m = n$, sau $n = 3m$, sau $m = n^2$ etc. Cititorul a observat probabil, că suprafeţele noastre poliedrice coincid, în fond, cu suprafeţele laterale ale prismelor regulate cu m feţe, înscrise în cilindru, deci împărţirea fiecărei feţe dreptunghiulare a unei astfel de prisme în $2n$ triunghiuri a avut numai scopul de a încadra modul de înscriere în schema generală reprezentată în fig. 29. Aşadar, avem de a face cu o variantă întrucîtva complicată pentru stabilirea curentă a formulei care dă aria laterală a cilindrului ($S_{lat.\ cil.} = 2\pi RH$) prin înscrierea de prisme regulate, cu o trecere apoi la limită. Pînă în prezent, raţionamentele noastre nu conţin nimic sofistic.

Acum vom schimba întrucîtva modul de înscriere a suprafeţei poliedrice. Ca şi înainte, vom împărţi înălţimea H în n seg-

---

[1]) Distanţa unui punct oarecare la suprafaţa laterală a cilindrului se măsoară prin diferenţa dintre raza lui şi distanţa de la acest punct la axa cilindrului.

mente egale, vom duce cele $n-1$ secțiuni circulare, care, împreună cu bazele cilindrului, dau $n+1$ cercuri; vom înscrie în fiecare dintre ele cîte un poligon regulat, cu m laturi, dar vom așeza altfel vîrfurile lor și anume, astfel ca generatoarea dusă prin orice vîrf al poligonului înscris într-un cerc oarecare să împartă în jumătate arcul subîntins de latura poligonului înscris în cercul vecin (de exemplu, în fig. 31, generatoarea care trece prin P împarte în jumătate arcele MN și QS; dreptele QM și SN, care nu au fost trasate pe figură, sînt generatoare). Cu alte cuvinte în timp ce, în cazul precedent, poligonul înscris într-un cerc oarecare se obținea din poligonul înscris în cercul vecin printr-o simplă translație după direcția generatoarei cu distanța $\frac{H}{n}$, acum la această translație se mai adaugă o rotație în jurul centrului poligonului, egală cu jumătate din unghiul lui la centru, adică cu $\frac{\pi}{m}$. Așezînd în acest mod poligoanele regulate înscrise, construim o suprafață poliedrică (neconvexă!), formată din fețe triunghiulare, unind fiecare vîrf cu cele două vîrfuri, cele mai apropiate, situate pe cercul vecin. Această suprafață poliedrică (al cărei aspect amintește un lampion pliant de hîrtie, desfăcut), constînd din $2mn$ triunghiuri isoscele egale (cîte $2m$ în fiecare dintre cele n zone), este înscrisă în suprafața curbă a cilindrului, în adevăratul sens al acestui cuvînt (v. nota de la pag. 46).

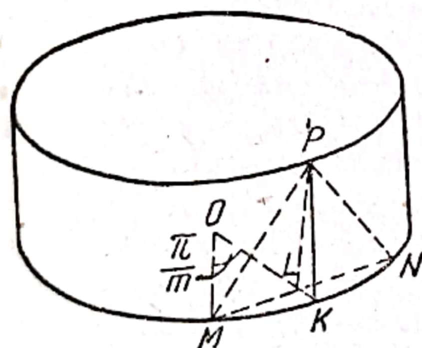


Fig. 32

Avînd în vedere că vrem să găsim aria suprafeței poliedrice, ne vom ocupa de una dintre fețele ei egale MNP, reprezentată în fig. 31 și, separat, în fig. 32, unde MN este latura poligonului regulat cu m laturi, înscris în secțiunea circulară de centru O, punctele K și L sînt respectiv mijloacele arcului MN și coardei MN; PK este un segment de generatoare. Triunghiul MNP este isoscel ($PM = PN$, deoarece aceste segmente au proiecții egale KM și KN pe planul cercului O); vom afla înălțimea sa PL din triunghiul PKL, unde $K = 90°$,

$$PK = \frac{H}{n}, \quad KL = R - OL = R - R\cos\frac{\pi}{m} = 2R\sin^2\frac{\pi}{2m}$$

de unde

$$PL = \sqrt{\left(\frac{H}{n}\right)^2 + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Și, deoarece $\frac{1}{2}MN = R\sin\frac{\pi}{m}$, avem

$$\text{aria } MNP = R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^2}{n^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Dacă notăm cu $S_{m,n}$ aria întregii suprafețe poliedrice care se obține prin împărțirea cercului în m părți și a înălțimii în h părți, obținem

$$S_{m,n} = 2mnR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{\frac{H^2}{n^2}+4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4n^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Cum am observat și într-un alt caz, din ansamblul numerelor $S_{m,n}$ se poate extrage — într-o infinitate de moduri — un șir, stabilind o dependență între indicii m și n; vom considera două variante de acest fel.

a) $n = m^2$, adică împărțind cercul succesiv în 3, 4, 5,... părți, vom împărți înălțimea respectiv în 9, 16, 25,... părți. Este cazul să notăm acum aria suprafeței poliedrice prin S_m, deoarece ea nu mai depinde decît de indicele m; ea este dată de formula

$$S_m = 2mR\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2+4m^4R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}}.$$

Urmează acum să efectuăm trecerea la limită pentru $m\to\infty$, pentru care $\frac{\pi}{m}$, deci $\sin\frac{\pi}{m}$ și $\sin\frac{\pi}{2m}$ tind către zero. Pentru a putea aplica ultima dintre formulele date în nota de la p. 41, transformăm expresia lui S_m:

$$S_m = 2\pi R\frac{\sin\frac{\pi}{m}}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{H^2+\frac{1}{4}\pi^4R^2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2m}}{\frac{\pi}{2m}}\right)^4},$$

după care găsim:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = 2\pi R\sqrt{H^2+\frac{1}{4}\pi^4R^2}.$$

Această limită este în mod evident mai mare decît $2\pi RH$ — expresia general cunoscută a ariei laterale a cilindrului. S-ar putea obține pentru această limită și alte valori, în particular oricît de mari; de exemplu, punînd $n = km^2$ (k—număr natural), am avea

$$\lim_{m \to \infty} S_m = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{k^2}{4}\pi^4 R^2}.$$

b) $n = m^3$, astfel încît, în comparație cu varianta precedentă numărul de diviziuni ale înălțimii crește și mai repede. În expresia lui S_m, aceasta duce numai la apariția unui factor suplimentar m^2 în al doilea termen al sumei de sub radical. Datorită acestui fapt, termenul considerat și, o dată cu el, S_m vor tinde către infinit, pentru $m \to \infty$. Aceasta înseamnă că se poate stabili o lege de înscriere a suprafețelor poliedrice, astfel încît ariile lor, crescînd nemărginit, să nu tindă către nici o limită. Rezultă că suprafața laterală a cilindrului nu are arie.

Am ajuns la absurdități evidente și trebuie acum să căutăm eroarea.

Exemplul 15. *Aria sferei de rază R este egală cu* $\pi^2 R^2$. Să considerăm emisfera (fig. 33) cu centrul O, „ecuatorul“ q și „polul“ P

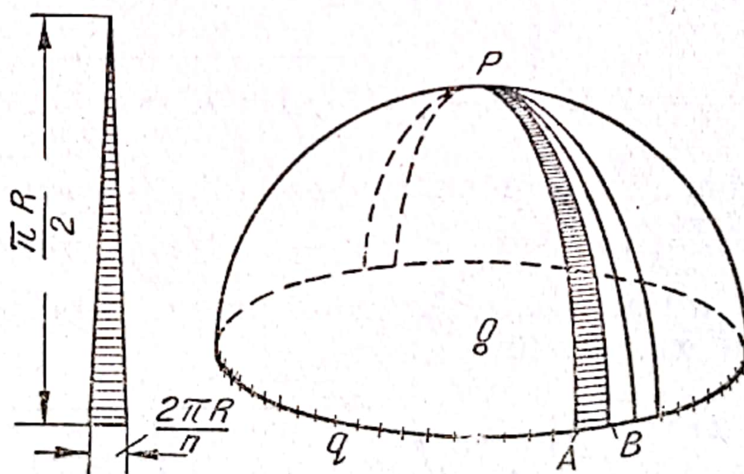


Fig. 33

(aceasta înseamnă că raza OP este perpendiculară pe planul ecuatorului q, în punctul O). Să împărțim cercul q într-un număr foarte mare n de părți egale și să unim P cu toate punctele de diviziune, prin arce de cerc mare (fiecare arc este $\frac{1}{4}$ din „meridian“); prin

aceasta, emisfera va fi împărțită în n triunghiuri sferice foarte înguste, fiecare dintre ele mărginit de un mic arc al ecuatorului și de două arce de meridian (cîteva triunghiuri de acest fel sînt reprezentate în figură; unul dintre ele PAB este hașurat). Făcînd să crească nemărginit numărul n de diviziuni, aceste triunghiuri sferice pot fi făcute oricît de înguste („mai subțiri decît firul de păianjen") iar triunghiul curbat „infinit de îngust" se poate aplatiza, sau, cum se spune, „desfășura" în plan, păstrînd toate dimensiunile (adică lungimile, unghiurile, aria). Se obține un triunghi plan (isoscel), avînd drept bază arcul rectificat de lungime, $\frac{2\pi R}{n}$, iar ca înălțime, un arc rectificat egal cu un sfert de cerc, adică de lungime $\frac{\pi R}{2}$ (v. triunghiul hașurat din fig. 33, stînga). Aria acestui triunghi este $\frac{1}{2}\frac{2\pi R}{n}\frac{\pi R}{2} = \frac{1}{2n}\pi^2R^2$, prin urmare aria totală a tuturor celor n triunghiuri care acoperă emisfera este egală cu $\frac{1}{2}\pi^2R^2$, iar aria întregii sfere este π^2R^2.

Aceasta este în contrazicere cu formula cunoscută, conform căreia aria sferei este egală cu $4\pi R^2$ (căci $\pi \neq 4$).

CAPITOLUL IV

ANALIZA EXEMPLELOR TRATATE ÎN CAPITOLUL III

La exemplul 11. În forma lui clasică, acest sofism ține de fapt nu de geometrie, ci de mecanică (mai exact, de cinematică, adică de știința mișcării), întrucît este vorba de o roată, care se mișcă într-un mod special. Pe de altă parte, se poate vedea dinainte că, la un studiu mai atent, substratul cinematic se va dovedi pur exterior, deoarece aici timpul nu joacă un rol esențial (de exemplu, este indiferent dacă roata se învîrtește repede sau încet); întregul sofism poate fi expus în limbaj geometric, ceea ce se și face ceva mai jos.

Indiscutabil, partea slabă a raționamentelor noastre este caracterul vag al expresiei „*cercul se rostogolește* (fără alunecare) *pe o dreaptă*". Ajunge să convenim asupra sensului exact al acestei expresii pentru ca să devină clar imediat că, dacă în acest sens, unul dintre cercurile solidar legate se rostogolește, celălalt nu se rostogolește și demonstrația sofistică nu mai este valabilă.

Vom vorbi, la început, în limbaj cinematic. „Cercul se rostogolește fără alunecare pe dreaptă" înseamnă: cercul se mișcă astfel încît, în orice moment, el este tangent la dreaptă, punctul de pe cerc în care are loc tangența avînd, în acest moment, viteza nulă. Cu alte cuvinte, punctul cercului care se găsește, la momentul dat, „jos", adică coinicide cu punctul de tangență, servește drept „centru instantaneu de rotație" pentru cercul care se rostogolește. Acest din urmă lucru înseamnă că viteza oricărui punct legat de cerc (nu este neapărat nevoie ca acest punct să se afle pe cerc) este, în fiecare moment, aceea pe care ar avea-o dacă, în acel moment, cercul s-ar roti în jurul punctului său de tangență. În particular, direcția acestei viteze este perpendiculară pe dreapta care unește punctul dat cu punctul de tangență; cu notațiile din fig. 24, viteza punctului care a ajuns în poziția M' este orientată după perpendiculara la dreapta $M'P$ (așadar, pentru cicloida din fig. 26, normala în punctul M' este dreapta $M'P$).

Dimpotrivă, dacă punctul de pe cerc care, la momentul dat, se află „jos" are o viteză diferită de zero, se spune că mișcarea are loc „cu alunecare pozitivă", cînd această viteză este orientată în sensul mișcării, sau „cu alunecare negativă", cînd este orientată în partea opusă. Numai în cazul în care alunecarea lipsește, se poate afirma că drumul parcurs pe dreaptă, în orice interval de timp, este egal cu lungimea arcului de cerc, care corespunde unghiului la centru cu care s-a rotit, în acest interval, o rază oarecare a cercului; de exemplu, în fig. 24 și 26, $MP = \overset{\frown}{PM'}$; în particular, MM^* este egal ca lungime cu întregul cerc care se rostogolește. În cazul unei alunecări pozitive, $MP > \overset{\frown}{PM'}$, iar în cazul unei alunecări negative, $MP < \overset{\frown}{PM'}$.

Acum sîntem în măsură să descriem pur geometric diferitele moduri de rostogolire, deși uneori, pentru a da o imagine mai intuitivă, vom păstra limbajul cinematic. Să considerăm (fig. 24 și 26) segmentul $MM^* = 2\pi R$ și să construim, în fiecare punct P al lui, cercul tangent cu centrul O', situat de o parte determinată a lui MM^* și avînd raza R; să aștemem pe acest cerc arcul $\overset{\frown}{PM'}$, egal în lungime cu segmentul PM și avînd același sens cu el, în punctul P[1]). Dacă efectuăm această construcție pentru toate pozițiile posibile ale punctului P pe segmentul MM^*, spu-

---

[1]) Aceasta înseamnă că arcul $\overset{\frown}{PM'}$ (iar dacă acesta este mai mare decît un semicerc, partea de arc adiacentă lui P) și segmentul PM se află de aceeași parte a diametrului PO' (în cazul altei curbe care se rostogolește, am spune: de o aceeași parte a normalei).

nem (revenind numai la limbajul cinematic, dar rămînînd în fond, în domeniul geometric) că ansamblul tuturor cercurilor tangente s-a obţinut în urma unei rotaţii a cercului de rază R, care se rostogoleşte fără alunecare pe dreapta MN, iar locul geometric al punctelor M', corespunzînd diferitelor poziţii ale punctului P, îl vom numi traiectoria punctului M. Dacă, în construcţia precedentă, am înlocui egalitatea $MP = \overset{\frown}{PM'}$ prin proporţionalitatea $MP = k\,\overset{\frown}{PM'}$ (k este un factor constant, diferit de 1), am spune că cercul se rostogleşte „cu alunecare constantă de coeficient k", alunecarea fiind pozitivă sau negativă, după cum este pozitivă sau negativă diferenţa $k-1$.

Înarmaţi cu aceste definiţii exacte, să revenim la roata lui Aristotel. Din punct de vedere cinematic, dacă cel mai mare dintre cercurile concentrice, reprezentate în fig. 24, se rostogoleşte fără alunecare pe dreapta MN, cu siguranţă că cel mai mic nu se rostogoleşte la fel pe dreapta M_1N_1. În adevăr, dacă şi cercul mic s-ar rostogoli fără alunecare, în momentul în care centrul comun al cercurilor se găseşte în O', figura în mişcare ar avea, în acelaşi timp, două centre instantanee de rotaţie, P şi P_1 (şi atunci viteza punctului M' ar fi orientată perpendicular atît pe PM', cît şi pe P_1M', ceea ce este imposibil). Mai mult, se poate spune că cercul mai mic se rostogoleşte cu alunecare pozitivă, deoarece întotdeauna $M_1P_1 = MP = \overset{\frown}{PM'}$ şi deci, $M_1P_1 > \overset{\frown}{P_1M_1'}$. Invers, dacă am face cercul mic să se rostogolească fără alunecare de-a lungul dreptei M_1N_1 cercul mare, antrenat de el, s-ar rostogoli cu alunecare negativă.

La aceleaşi concluzii ajungem pornind de la definiţiile geometrice: dacă cercul mare din fig. 24 „se rostogoleşte" astfel încît, în orice poziţie a lui, să avem $MP = \overset{\frown}{PM'}$, atunci, pentru cercul mai mic, $M_1P_1 > \overset{\frown}{P_1M_1'} = \frac{R}{r}\overset{\frown}{P_1M_1'}$, unde R şi r sînt razele cercului mare şi cercului mic. Aşadar, cercul mai mic se rostogoleşte cu alunecare pozitivă de coeficient $\frac{R}{r}$ (>1). Invers dacă cercul mai mic se rostogoleşte fără alunecare, cercul cel mare se rostogoleşte cu alunecare negativă de coeficient $\frac{r}{R}$ (<1).

La indicaţia de la pag. 38. Să considerăm două poligoane cu n laturi concentrice şi omotetice, $A_1A_2...A_n$ şi $a_1a_2...a_n$, cu centrul O (fig. 34, unde $n = 8$, iar pentru poligonul mai mare s-au păstrat notaţiile din fig. 25). Să presupunem că poligonul mare se

rostogolește așa cum s-a arătat la pag. 39; mai întîi, vîrful A_2 rămîne fix, ca centru de rotație, pînă cînd poligonul se rotește cu unghiul $\frac{2\pi}{n}$ (pentru a face comparație, reamintim că, la rostogolirea cercului, punctul lui de „jos“ era de asemenea centru de rotație, dar numai instantaneu). În urma unei astfel de rotații, poligonul mare se va așeza pe dreaptă cu latura A_2A_3, a cărei

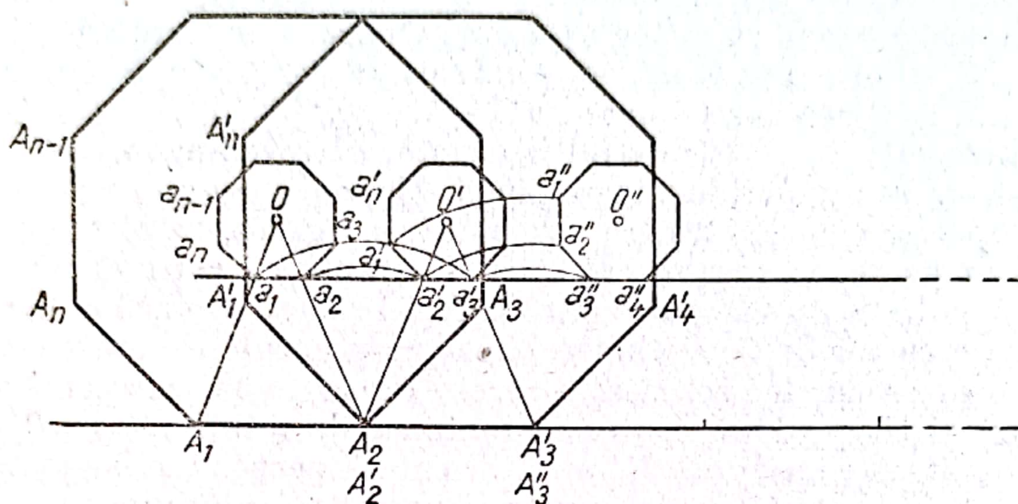


Fig. 34

nouă poziție notată cu $A'_2A'_3$, este în prelungirea laturii A_1A_2; datorită acestui fapt, pe măsură ce poligonul se rostogolește, perimetrul lui se „desfășoară“ pe dreaptă.

În mod cu totul diferit se va mișca însă poligonul mai mic solidar legat de cel mare: el se va roti tot în jurul centrului A_2, cu unghiul $\frac{2\pi}{n}$, în urma cărui fapt latura a_2a_3 va ocupa poziția $a'_2\,a'_3$, care însă nu constituie o prelungire a segmentului a_1a_2. Spre deosebire de poligonul $A_1A_2...A_n$ care „se mută“ de pe o latură pe alta, poligonul $a_1a_2...a_n$ „se mută“ și, totodată „sare“ dintr-o poziție în alta (în fig. 34, se arată două poziții succesive ale poligonului mare și trei poziții ale celui mic; se figurează, de asemenea, buclele inițiale ale traiectoriilor a_1, a_2, a_3; fiecare dintre părțile de traiectorie figurate este formată din două arce de cerc avînd ca măsură în radiani $\frac{2\pi}{n}$; de exemplu, pentru vîrful a_2 acestea sînt arcul $\overset{\frown}{a_2a'_2}$, cu centrul A_2, și arcul $\overset{\frown}{a'_2a''_2}$, cu centrul A'_3; ca și în cazul din fig. 25, propunem cititorului

să nu dea atenție unor particularități ale fig. 34, care își au originea în valoarea particulară $n = 8$ luate acolo, și să-și construiască o altă figură, de exemplu pentru $n = 5$). Datorită acestor „salturi", poligonul $a_1a_2...a_n$, deplasîndu-se de-a lungul dreptei $a_1a_1^{(n-1)}$ „acoperă o distanță" mai mare decît perimetrul lui; acesta este modelul aproximativ al „rostogolirii cu alunecare pozitivă". Propunem cititorului să explice cum s-ar mișca poligonul $A_1A_2...A_n$, dacă am face poligonul $a_1a_2..., a_n$ să se rostogolească fără alunecare pe o dreaptă: se poate prevedea că, după fiecare rotație cu un unghi $\frac{2\pi}{n}$, în jurul unui vîrf al poligonului mic, latura celui mai mare se va suprapune parțial peste latura precedentă a acestui poligon și, în consecință, drumul parcurs la o rotație completă va fi mai mic decît perimetrul; obținem o imagine aproximativă a „rostogolirii cu alunecare negativă".

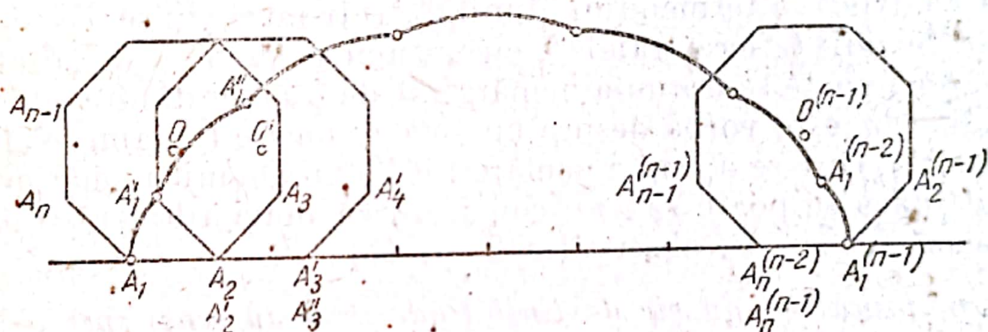


Fig. 35

La problema de la pag. 40. Este suficient să dăm figura și unele rezultate intermediare:

În fig. 35, se reprezintă traiectoria $A_1A_1'A_1''...A_1^{(n-1)}$ a vîrfului A al poligonului care se rostogolește (cazul particular $n = 8$), descrisă mai amănunțit la pag. 40. Lungimea acestei traiectorii formate din arce de cerc este

$$\frac{2\pi}{n}2R\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=$$

$$=\frac{4\pi R}{n}\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

Aria figurii mărginite de această traiectorie și de segmentul $A_1A_1^{(n-1)}$ se compune din 1) ariile sectoarelor circulare $A_2A_1A_1'$, $A_3'A_1'A_1''$, ..., $A_n^{(n-2)}$

$A_1^{(n-2)}\ A_1^{(n-1)}$, fiecare cu unghiul la centru de $\frac{2\pi}{n}$; suma acestor arii este

$$\frac{4\pi R^2}{n}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=2\pi R^2;$$

2) ariile triunghiurilor $A_1'\,A_2\,A_3'$, $A_1''\,A_3'\,A_4''$, ..., $A_1^{(n-2)}\,A_{n-1}^{(n-3)}\,A_n^{(n-2)}$ cu suma totală

$$2R^2\sin\frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{(n-2)\pi}{n}\right)=nR^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}.$$

La exemplul 12. Eroarea logică se ascunde în ultima frază a demonstrației (cea care precede observația 1) și constă în folosirea echivocă a termenului „limită“. Într-un caz, se consideră un șir de linii („ferăstraiele“, cu un număr variabil de „dinți“), ale căror puncte se apropie nemărginit de o anumită dreaptă. În celălalt caz, este vorba despre un șir de numere (lungimile „ferăstraielor“), care se apropie nemărginit de un anumit număr determinat (dacă se poate sau nu considera că lungimile ferăstraielor formează un șir, v. observația 2, p. 43).

Din faptul că un șir de linii tinde (într-un sens) spre o linie determinată, nu avem nici un motiv să tragem concluzia că șirul lungimilor acestor linii tinde (în celălalt sens) către lungimea acestuia din urmă.

Să nu ne lăsăm derutați de faptul că, atunci cînd dinții devin foarte mici, „ferăstrăul“ nu poate fi deosebit practic, de un segment de dreaptă; acesta nu este un fapt geometric, ci unul fizic, chiar fiziologic, depinzînd de proprietățile vederii noastre (un microscop puternic ar schimba situația). Dar, dacă este vorba de intuiție, sprijinind-o prin raționament, chestiunea stă în felul următor. Este adevărat, că, în fiecare triunghi mic („dinte al ferăstrăului“), diferența dintre suma catetelor și ipotenuză este neînsemnată, dar numărul acestor diferențe este foarte mare, și termenii cei mai mici în număr foarte mare pot, evident, să dea orice sumă. Dacă am vrea să pătrundem mai adînc în esența lucrurilor, am da atenție faptului că dinții „ferăstrăului“ se apropie de dreapta AB în ce privește distanța, dar nicidecum în ce privește direcția: oricît de mici ar fi segmentele liniei frînte,

ele sînt (fig. 27) totdeauna sau orizontale sau verticale, în timp ce ipotenuza AB este oblică.

La exemplul 13. Eroarea este de aceeaşi natură ca în exemplul precedent. Şirul de linii ondulate se apropie nemărginit de segmentul de dreaptă, dar lungimile lor nu au ca limită lungimea acestui segment. Ca şi în cazul precedent, are loc tinderea unei linii către cealaltă în ce priveşte distanţa, dar nu în ce priveşte direcţia: dacă segmentul AB este orizontal, direcţia liniei ondulate — oricît de mici ar fi semicercurile care o compun — oscilează întotdeauna între direcţia verticală şi cea orizontală.

La exemplul 14. Deşi situaţia este cu mult mai complicată decît în cele două exemple precedente, natura logică a sofismului este aceeaşi: este adevărat că suprafaţa poliedrică se apropie nemărginit de cea cilindrică, dar de aici nu rezultă de loc că aria suprafeţei poliedrice se apropie nemărginit de aria celei cilindrice. Pentru a ne lămuri mai bine legătura între o apropiere şi cealaltă, să observăm că, şi prin modul de înscriere al suprafeţei poliedrice arătat în fig. 31, s-ar putea obţine o formulă corectă pentru aria laterală a cilindrului, dacă, spre exemplu, am lua $n = m$ sau $n = 10m$, în general dacă am face ca numărul diviziunilor înălţimii şi numărul diviziunilor cercului să varieze proporţional unul cu celălalt. De exemplu, pentru $n = 10m$, am avea

$$S_m = 2m\,R\sin\frac{\pi}{m}\sqrt{H^2 + 400\,m^2R^2\sin^4\frac{\pi}{2m}} =$$

$$= 2\pi R\,\frac{\sin\dfrac{\pi}{m}}{\dfrac{\pi}{m}}\sqrt{H^2 + \frac{25\pi^4R^2}{m^2}\left(\frac{\sin\dfrac{\pi}{2m}}{\dfrac{\pi}{2m}}\right)^4}$$

şi, pentru $m \to \infty$, am obţine $\lim S_m = 2\pi RH = A_{lat.\ cil}$. Prin ce se explică faptul că, în cazul legii de înscriere definite prin formula $n = m^2$, aria S_m a suprafeţei poliedrice tindea către o limită mai mare decît $2\pi RH$, iar pentru $n = m^3$, chiar spre infinit? Ne permitem să răspundem, într-un limbaj nematematic, renunţînd la orice pretenţii de demonstraţie şi scoţînd în evidenţă numai ceea ce este accesibil reprezentării intuitive (şi ceea

ce poate, după o prelucrare matematică, să formeze baza unei demonstraţii). Dacă $n = m$ sau $n = 10\, m$ etc. desimea diviziunilor pe cerc şi pe înălţime creşte în acelaşi ritm; datorită acestui fapt, suprafaţa poliedrică, chiar neconvexă, are totuşi feţe aproape verticale, dacă se presupune că cilindrul este aşezat vertical (propunem cetitorului să demonstreze, folosind fig. 32, că faţa MNP face cu planul orizontal MKN un unghi care tinde către $\frac{\pi}{2}$ cînd $m \to \infty$). Aşadar, suprafaţa poliedrică se apropie de cea cilindrică, nu numai în distanţă, ci şi în direcţie. Alta este situaţia în cazul $n = m^2$ sau $n = m^3$ etc. Acum diviziunile înălţimii se îndesesc într-un ritm mult mai rapid decît diviziunile cercului. În urma acestui fapt, suprafaţa poliedrică devine sensibil mai „dinţată", în urma cărui fapt rezultă o arie suplimentară. Acum, feţele triunghiulare nu mai tind să devină verticale; se poate arăta că, pentru $n = m^2$, unghiul PLK (fig. 32) se apropie nemărginit de un anumit unghi ascuţit, iar pentru $n = m^3$, chiar de zero (adică faţa tinde să devină orizontală), cînd $m \to \infty$.

În încheiere, să examinăm o problemă care se prezintă în mod natural: de unde provine faptul că nu avem analogie între înscrierea liniilor frînte într-o linie curbă şi aceea a suprafeţelor poliedrice, într-o suprafaţă curbă? De ce, în primul caz, îndesirea vîrfurilor asigură apropierea liniilor, nu numai în distanţă, ci şi în direcţie, în timp ce, în al doilea caz, apropierea în distanţă poate avea loc fără apropiere în direcţie? Fără a intra în amănunt, menţionăm numai următoarele fapte. Atunci cînd, pe o linie curbă, două puncte dintre care unul este fix, tind să coincidă, dreapta care uneşte aceste puncte are ca limită tangenta la curbă în punctul fix. Cînd însă, pe o suprafaţă curbă trei puncte (să presupunem: niciodată situate pe o aceeaşi dreaptă), dintre care unul este fix, tind să coincidă, planul care uneşte aceste puncte nu tinde neapărat să devină plan tangent. Pentru a ne convinge de aceasta, ajunge să ne imaginăm că, pe o sferă, am făcut o secţiune circulară oarecare şi că, pe acest cerc, am luat un punct fix şi alte două puncte care tind către primul; planul acestor trei puncte va fi tot timpul planul secţiunii.

La exemplul 15. Avem de-a face cu un abuz de expresii fără sens matematic, ca „un număr foarte mare", „triunghi foarte îngust", „arc mic", „triunghi infinit de îngust", care îşi au locul atunci cînd căutăm să descriem intuitiv o figură geometrică (acest mod de descriere s-a folosit de multe ori mai sus), dar sînt cu totul nepotrivite ca instrument de demonstraţie sau pentru a deduce formule. O eroare directă constă în afirmaţia că un triunghi infinit de îngust poate fi desfăşurat în plan, adică înlocuit printr-un triunghi plan cu laturi de aceeaşi lungime, cu aceleaşi unghiuri şi cu aceeaşi arie ca ale celui sferic. În realitate, nici un

triunghi sferic (oricît de mic ar fi) nu poate fi desfășurat în plan în sensul considerat aici; aceasta se vede și din faptul că suma unghiurilor unui triunghi plan este totdeauna egală cu $2d$, în timp ce, la un triunghi sferic, ea este totdeauna mai mare decît $2d$. În exemplul nostru, în triunghiul sferic PAB (fig. 33 dreapta), unghiurile A și B sînt drepte; dacă un astfel de triunghi ar putea fi desfășurat în plan, s-ar obține un triunghi plan (isoscel) (fig. 33 stînga) cu unghiurile la bază drepte.

TABLA DE MATERII

Traducere : Katz Moise

Responsabil de carte : Neicov Valentina
Tehnoredactor : Horowitz Strul
Corector : Griseanu Silviu

Dat la cules 26.11.957. Bun de tipar 13.01.58. Hîrtie semivelină de 65 g/m². 91×86/16. Coli editoriale 3,48. Coli de tipar 3,75. Comanda 4015. A. 02182 ; E 13.768. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari și mici 513.

Tiparul executat sub com. nr. 1454 la Combinatul Poligrafic Casa Scînteii „I. V. STALIN", București — R.P.R.